

**Графическое
решение задач
линейного
программирован
ия**

Математическая модель

$$f(X) = 2x_1 - 5x_2 \rightarrow \max \quad \text{задачи.} \quad \underline{\text{Целевая функция:}}$$

Ограничения:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad (1)$$

$$x_1 \leq 4 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (5-6)$$

I. Построение области допустимых планов

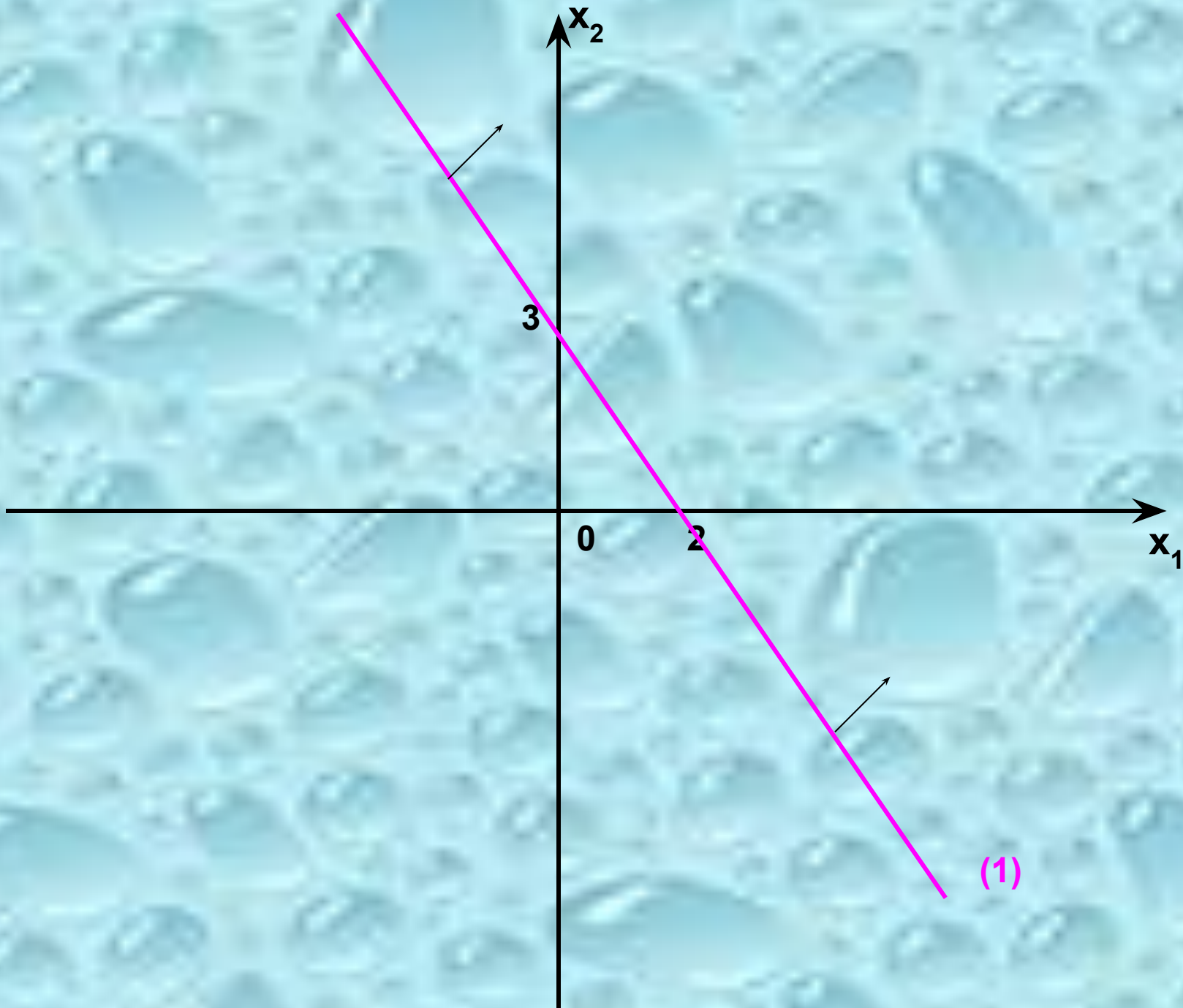
1) Построение границы 1:

$3x_1 + 2x_2 = 6$ – прямая линия

x_1	0	2
x_2	3	0

Решение неравенства 1:

Подставляем координаты точки $O(0;0)$ в неравенство: $3*0 + 2*0 \geq 6$ -неверно, следовательно точка O не принадлежит области допустимых планов.



2) Построение границы 2: $x_1 = 4$ – прямая линия

Решение неравенства 2: $0 \leq 4$ – верно

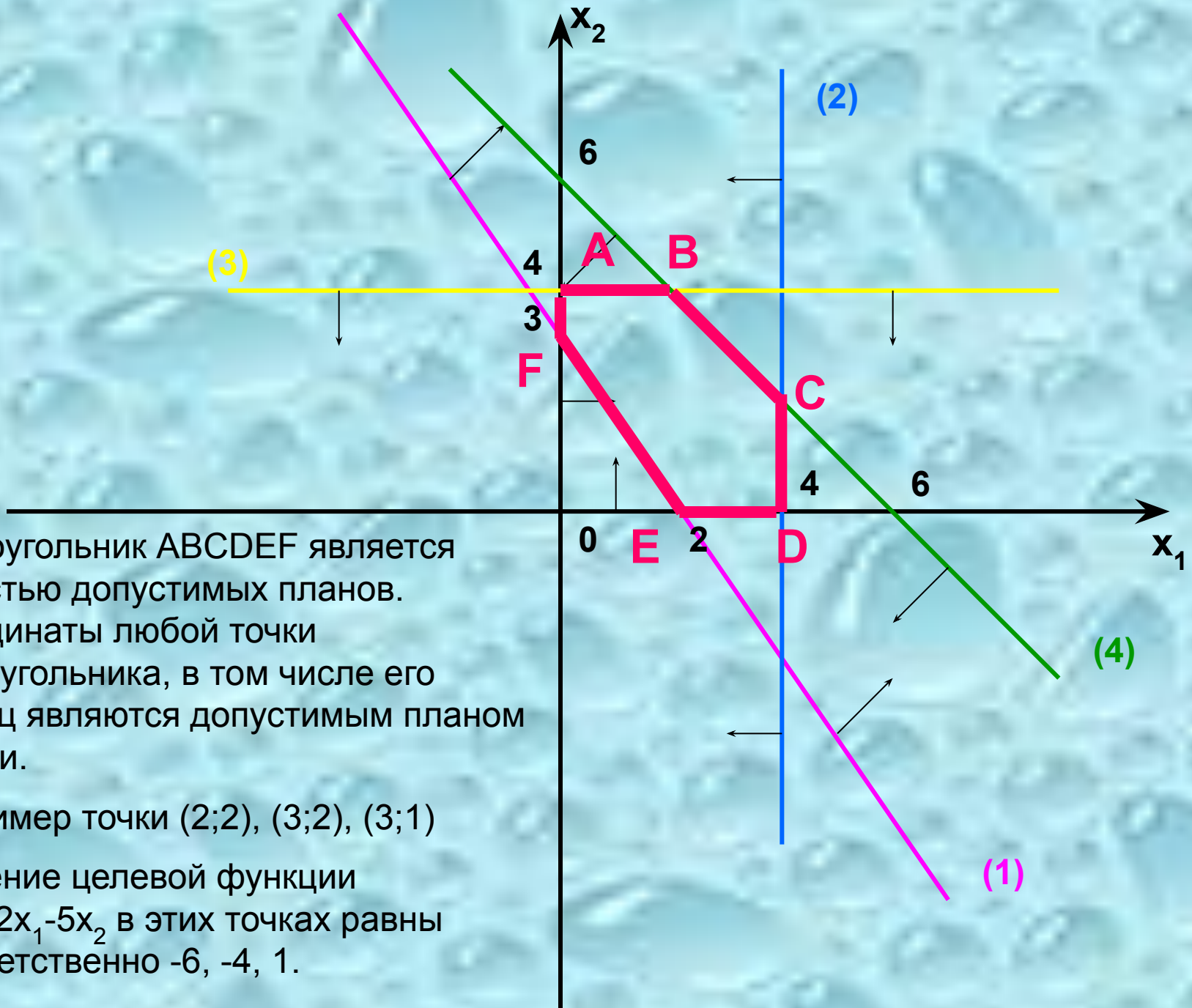
3) Построение границы 3: $x_2 = 4$ – прямая линия

Решение неравенства 3: $0 \leq 4$ – верно

4) Построение границы 4: $x_1 + x_2 = 6$ – прямая линия

x_1	0	6
x_2	6	0

Решение неравенства 4: $0 + 0 \leq 6$ - верно



Многоугольник ABCDEF является областью допустимых планов. Координаты любой точки многоугольника, в том числе его границ являются допустимым планом задачи.

Например точки (2;2), (3;2), (3;1)

Значение целевой функции $F(X)=2x_1-5x_2$ в этих точках равны соответственно -6, -4, 1.

II. Оптимизация целевой функции:

1) Построение линии уровня целевой функции:

Линия, на которой функция принимает одно и то же значение. (линия уровня)

$$f(X) = 0 \Rightarrow 2x_1 - 5x_2 = 0$$

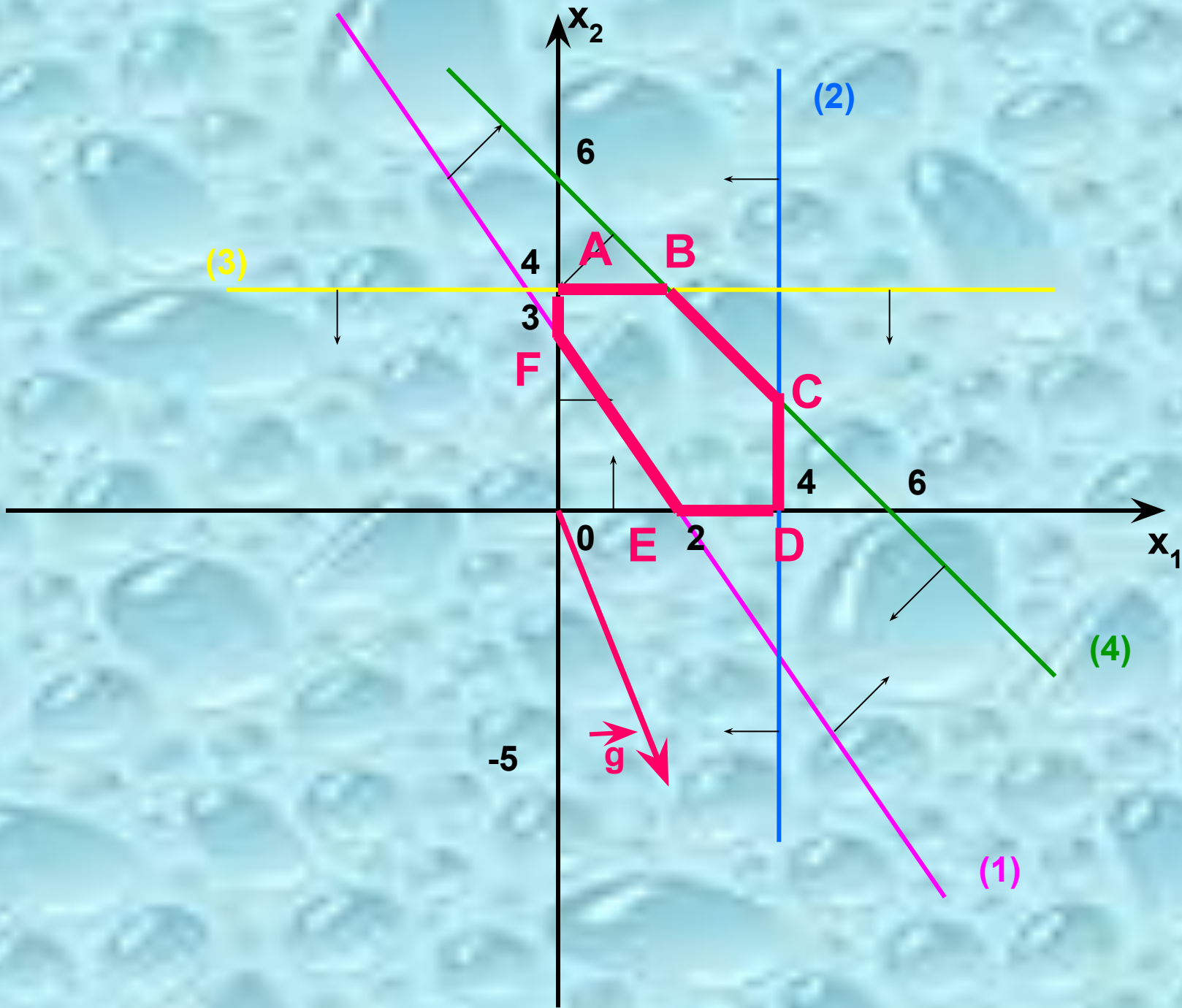
x_1	0	5
x_2	0	2

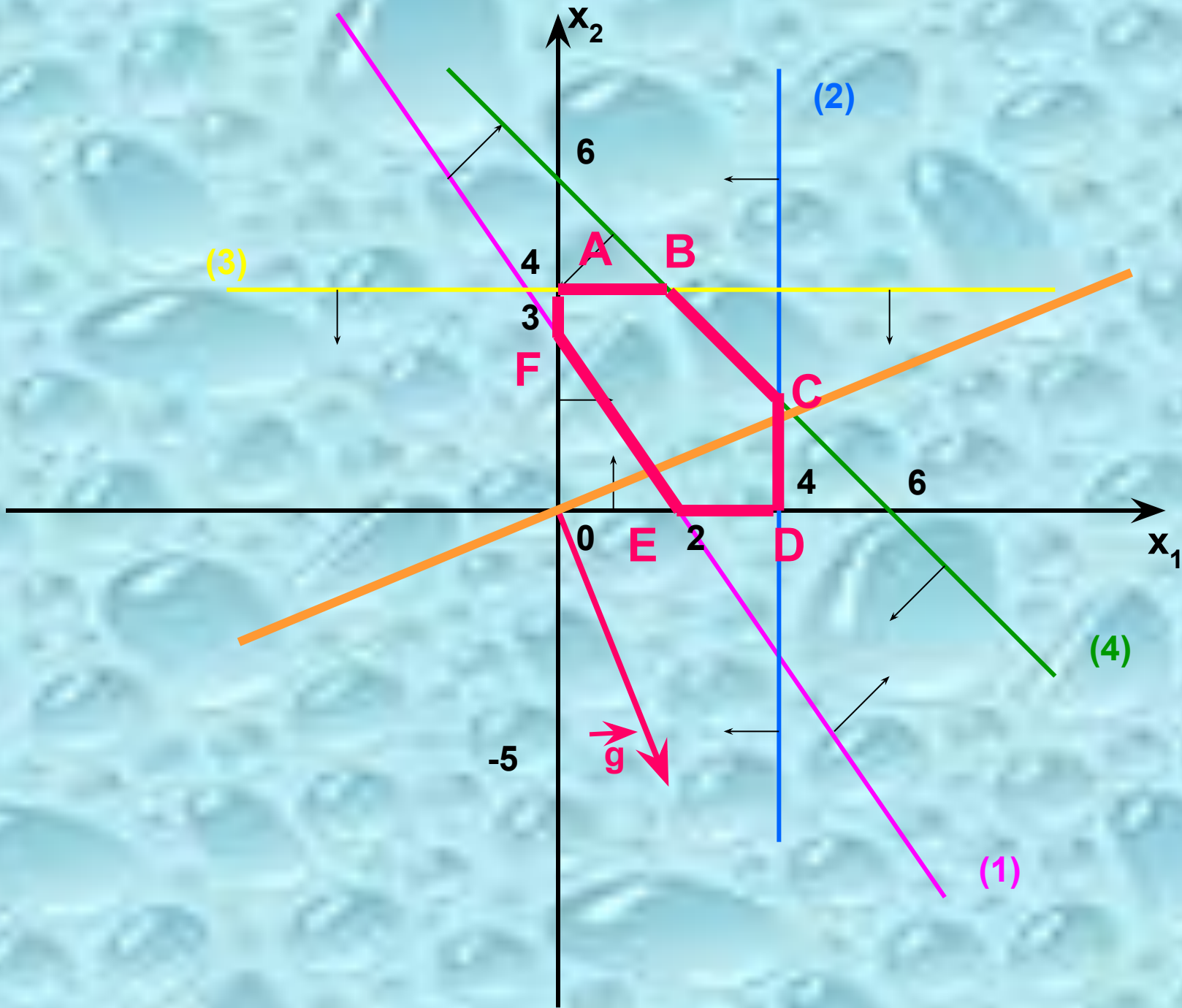
II. Оптимизация целевой функции:

2) Построение градиента:

$\vec{g} = (2; -5)$ – (коэффициенты при X в целевой функции)

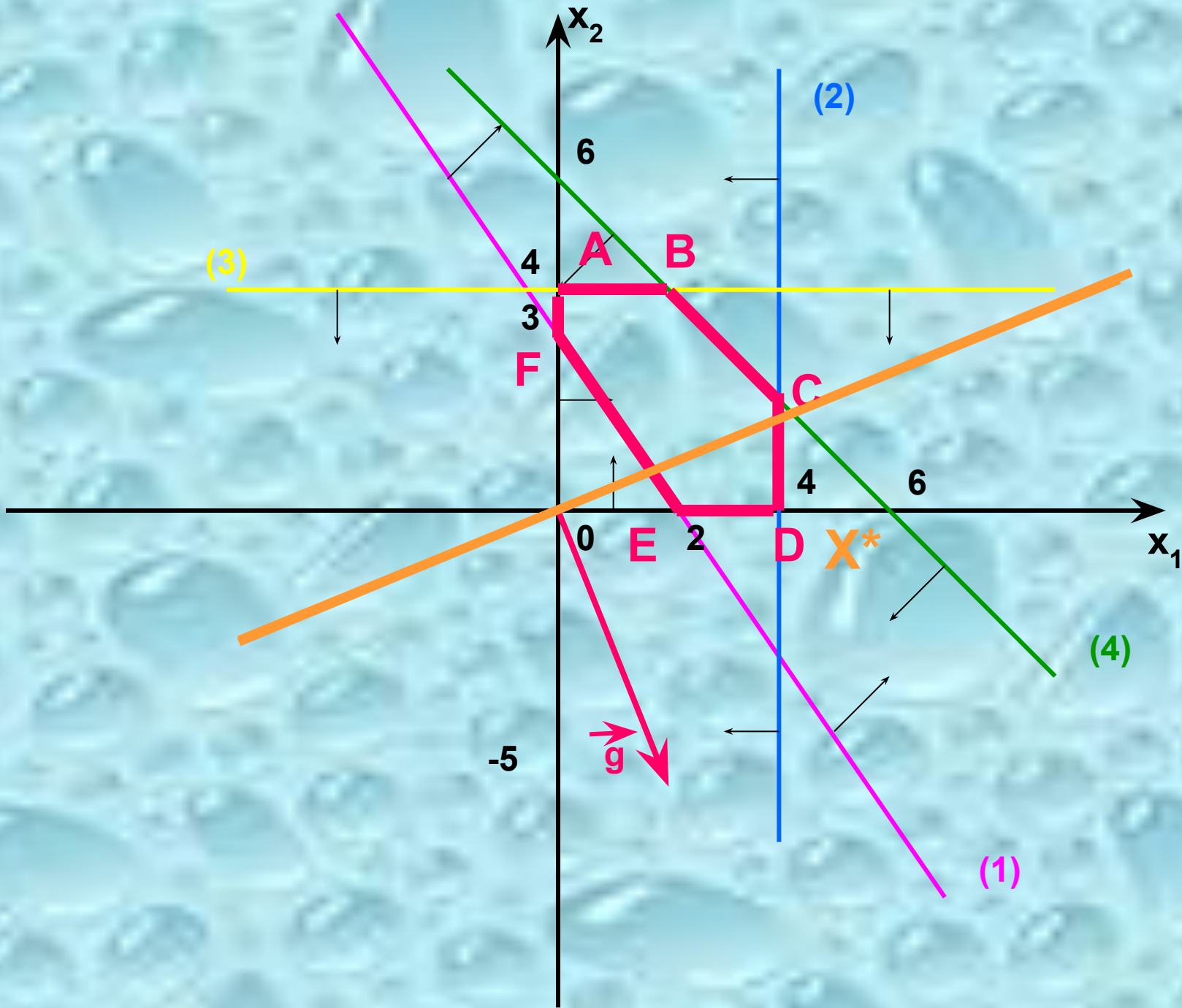
Градиент - вектор, направление которого показывает максимальную скорость роста этой функции.





Передвигаем линию уровня в направлении градиента (если задача на \max), при этом значение целевой функции возрастает. Если задача на \min , то - в направлении, противоположном градиенту.

Последняя точка контакта линии уровня с областью допустимых планов определяет оптимальный план (X^*), на котором целевая функция принимает \max (или \min) значение.



Оптимальный план X^* совпадает с точкой D.

Чтобы вычислить значения плана необходимо вычислить координаты точки пересечения соответствующих границ, где он находится.

$$X^* (2) \cap (5)$$

$$\begin{cases} X_1 = 4 \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Координаты являются решением системы уравнений, прямых в результате пересечения которых получается точка X^*

Оптимальный план $X^* = (4; 0)$

Максимальное значение
целевой функции:

$$\max f(X) = f(X^*) = 2 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 8$$

- Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

- Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня, проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора до тех пор, пока она не пройдет через ее последнюю общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.
- Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

При нахождении решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1 - 4.

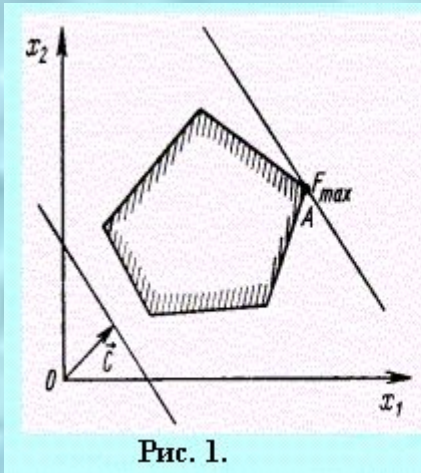
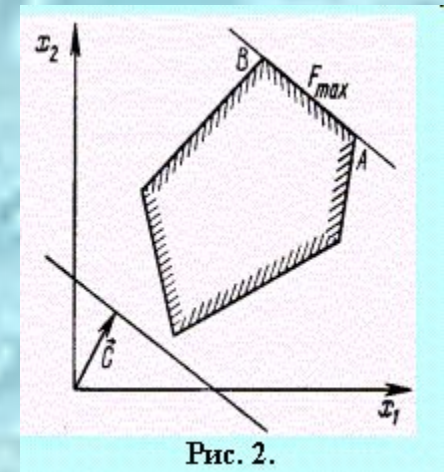


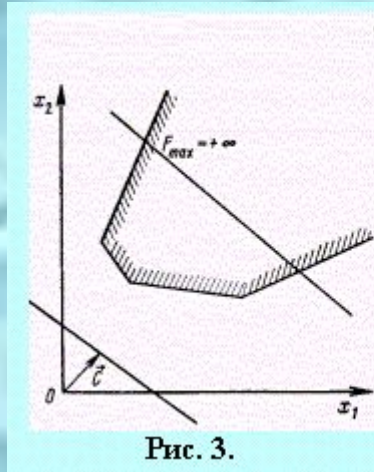
Рис. 1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке А (вершине многоугольника).

Из рис. 2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка АВ.

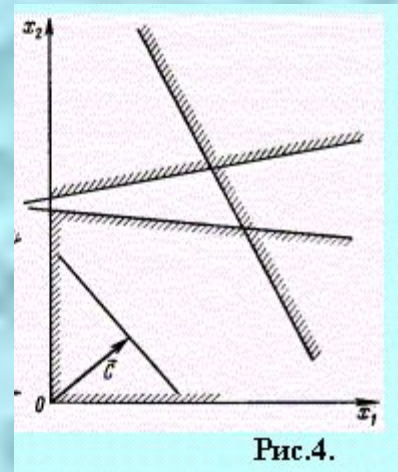
- Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, отрезка.



На рис. 3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений.



На рис. 4 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.



Этапы графического решения задачи линейного программирования

- 1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
- 2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
- 3. Находят многоугольник решений.
- 4. Строят вектор-градиент целевой функции .
- 5. Строят линию уровня целевой функции , проходящую через многоугольник решений.
- 6. Передвигают прямую в направлении вектора , в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
- 7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример.

- Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.
- Определить оптимальный план выпуска продукции, при котором прибыль будет максимальной.

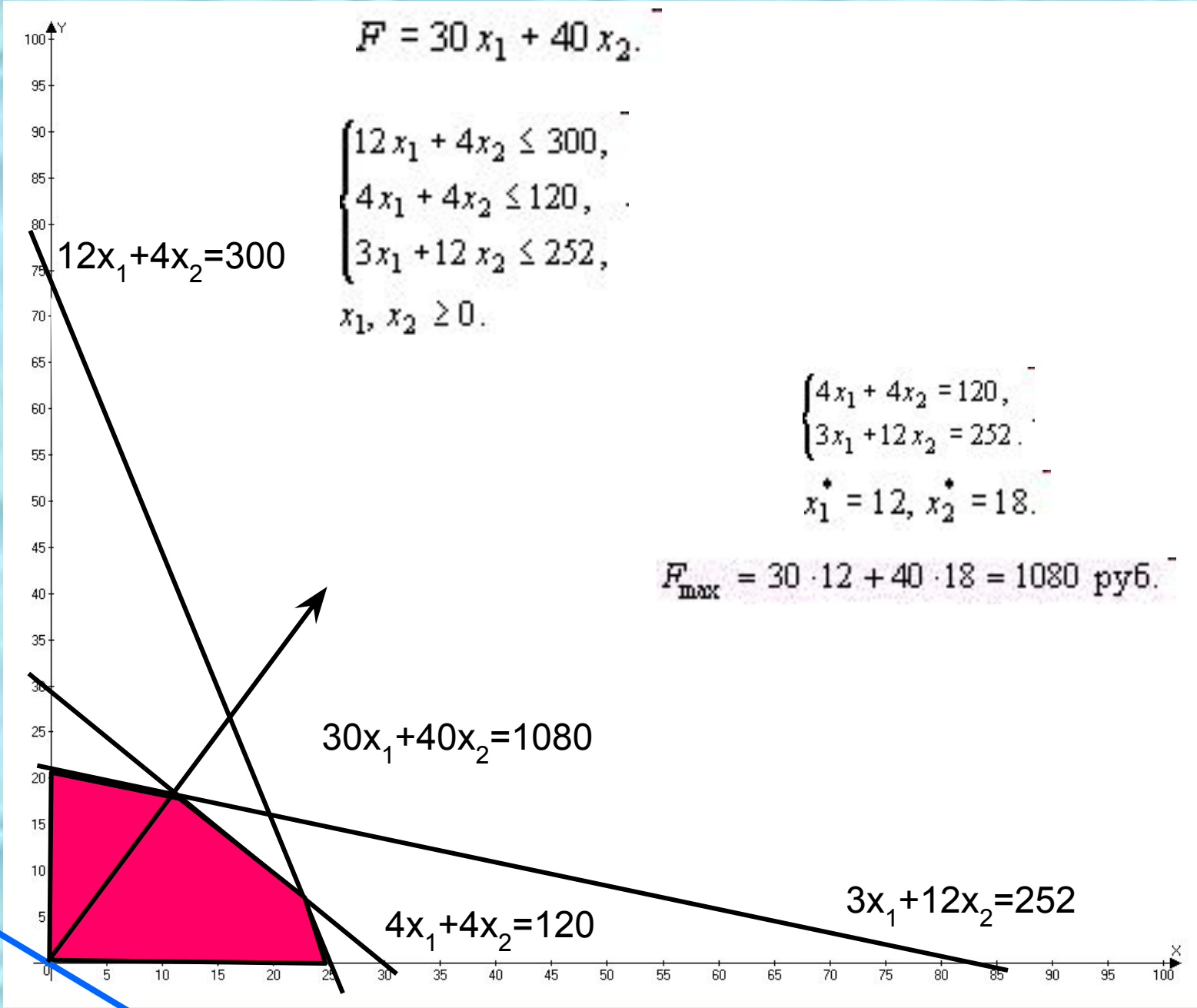
Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	А	В	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия(руб)	30	40	

Учитывая, что изделия А и В могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной,

Математическая модель задачи: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$F = 30x_1 + 40x_2.$$



Задача составления рациона.

- При откорме каждое животное ежедневно должно получать не менее 9 ед. питательного вещества S_1 , не менее 8 ед. вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3 . Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг корма приведены в таблице
- Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма.	
	Корм 1	Корм 2
$S_{1(\text{белки})}$	3	1
$S_{2(\text{жиры})}$	1	2
$S_{3(\text{углеводы})}$	1	6
Стоимость 1 кг корма, ед.	4	6

Решение

- Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество килограммов корма 1 и 2 в дневном рационе. Принимая во внимание значения, приведенные в таблице и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 6x_2 \geq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- Цель данной задачи – добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции
- $Z = 4x_1 + 6x_2$ (ед.)
- Требуется найти такие x_1 и x_2 , при которых функция Z принимает минимальное значение.

- Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат x_1Ox_2 на плоскости изобразим граничные прямые

$$3x_1 + x_2 = 9 \quad (L1)$$

$$x_1 + 2x_2 = 8 \quad (L2)$$

$$x_1 + 6x_2 = 12 \quad (L3)$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0.$$

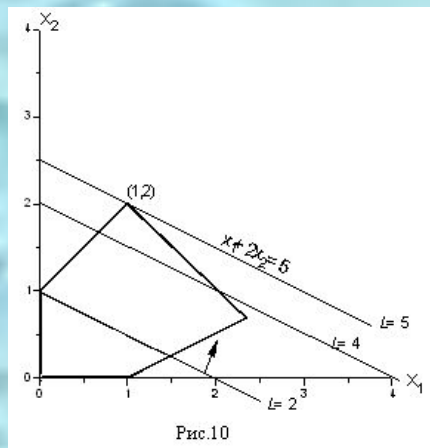
- Взяв какую-нибудь точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство.
- В результате получим неограниченную многоугольную область с угловыми точками А, В, С, D.
- Для построения прямой $4x_1 + 6x_2 = 0$ строим радиус-вектор $N = (4;6)$ и через точку O проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую $Z = 0$ перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора N . Из рис. следует, она впервые коснется многогранника решений и станет опорной по отношению к нему в угловой точке В. Если прямую перемещать дальше в направлении вектора N , то значения линейной функции на многограннике решений возрастут, значит, в точке В линейная функция Z принимает минимальное значение.
- Точка В лежит на пересечении прямых L1 и L2. Для определения ее координат решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

- Имеем: $x_1 = 2; x_2 = 3$. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получаем $Z_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$.
- Таким образом, для того, чтобы обеспечить минимум затрат (26 ед. в день), необходимо дневной рацион составить из 2 кг корма 1 и 3 кг корма 2.

Решите графически задачи

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\Rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 1, \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1, \\ x_1 + x_2 &\leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Ответ: $F(1;2)=5$

• 1

2

3

4

5

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\Rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\Rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 11 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\Rightarrow \min \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\Rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\Rightarrow \max \\ x_1 - x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

• 6

7

8

9

10

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\Rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\Rightarrow \max(\min) \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\Rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\Rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 &\geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\Rightarrow \max \\ 4x_1 - 2x_2 &\leq 12 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 &\geq 16 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$