



Линейное программирование

Вопросы

- Постановка задачи линейного программирования
- Графический метод решения задач линейного программирования
- Симплекс-метод решения задач линейного программирования
- Метод искусственного базиса
- Двойственность в линейном программировании

1 Постановка задачи ЛП

- Общая задача ЛП: Найти значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих ограничениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}) \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right.$$

и обращающих в максимум (минимум) линейную функцию этих переменных

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max) \quad a_{ij}, b_i, c_j \quad \text{постоянные величины}$$

- Допустимое решение задачи линейного программирования - это набор значений x_1, x_2, \dots, x_n , удовлетворяющих условиям задачи.
- Множество всех допустимых решений называется **областью допустимых решений**.
- Допустимое решение, при котором линейная целевая функция F принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется **оптимальным**.

- Стандартной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при выполнении условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Основной задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции F

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при выполнении условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

■ **Задача о распределении ресурсов**

Для изготовления 2-х видов продукции P1 и P2 используется 4 вида ресурсов S1, S2, S3, S4.

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, расходуемых на изготовление единиц продукции	
		P1	P2
S1	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	0	1
S4	21	3	0

Прибыль от реализации продукции P1 – 2 , P2 – 3.

Требуется составить такой план производства продукции, при котором прибыль от реализации будет максимальной.

■ x_1 x_2 – число единиц продукции P1 и P2.

Система ограничений будет следующая:

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_2 \leq 5$$

$$3x_1 \leq 21$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Прибыль составит: $F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

Задача составления рациона

- Имеется два вида корма *I* и *II*, содержащие питательные вещества S_1 , S_2 и S_3 .

Питательные вещества	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		<i>I</i>	<i>II</i>
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма *I* и *II* соответственно равна 4 и 6 условных единиц.

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

- обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество килограммов корма I и II в дневном рационе. Получим следующую модель:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

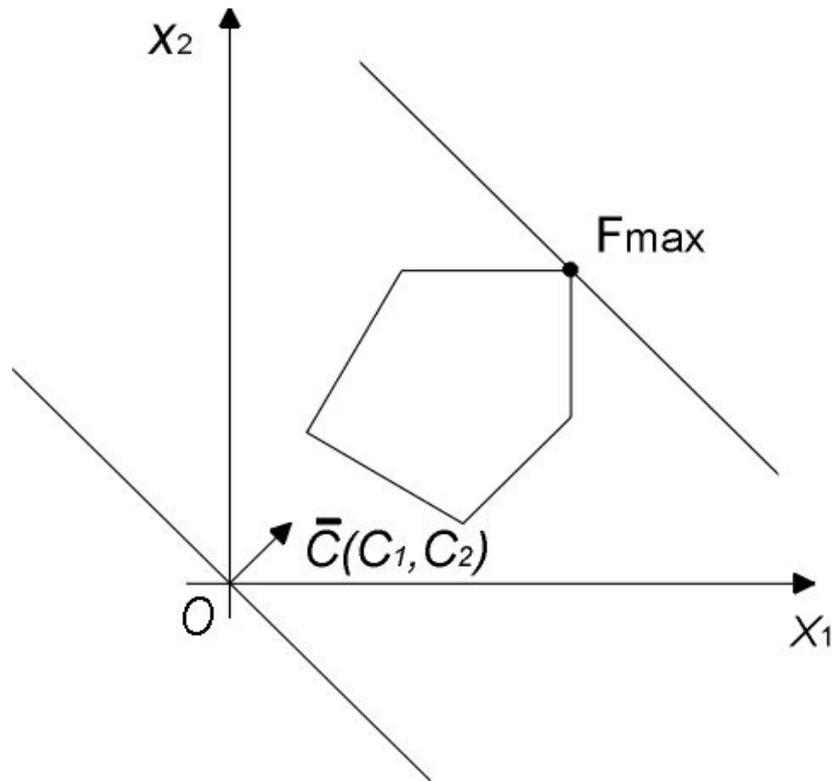
2. Графический метод решения задач линейного программирования

- Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования с двумя переменными ($n=2$), состоящую в определении максимального значения функции при условиях:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\begin{cases} a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i & (i = \overline{1, k}) \\ x_j \geq 0, & (j = 1, 2) \end{cases}$$

Задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция принимает экстремальное значение.



- Исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в котором целевая функция принимает максимальное значение. Эта точка является одной из вершин многоугольника решений

- **Теорема** *Если задача ЛП имеет оптимальный план, то ЦФ достигает своего максимального значения в одной из вершин выпуклого многогранника решений.*

Если ЦФ достигает максимального значения более, чем в 1-й вершине многогранника, то она достигает это значение и в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин (в любой точке на прямолинейном отрезке, соединяющем эти вершины).

Алгоритм решения графическим способом

- В системе координат строятся прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.
- Находятся полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи. Определяется многоугольник решений.

- Строится вектор .

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

- Строится прямая .

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 = const$$

- Прямая передвигается параллельно самой себе в направлении вектора \vec{c} , в результате чего находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение или устанавливают неограниченность сверху функции на множестве допустимых решений.
- Определяются координаты точки максимума функции и вычисляется значение целевой функции в этой точке.

Задача о распределении ресурсов

- Необходимо определить максимум функции при условиях:

$$F = 2x_1 + 3x_2$$

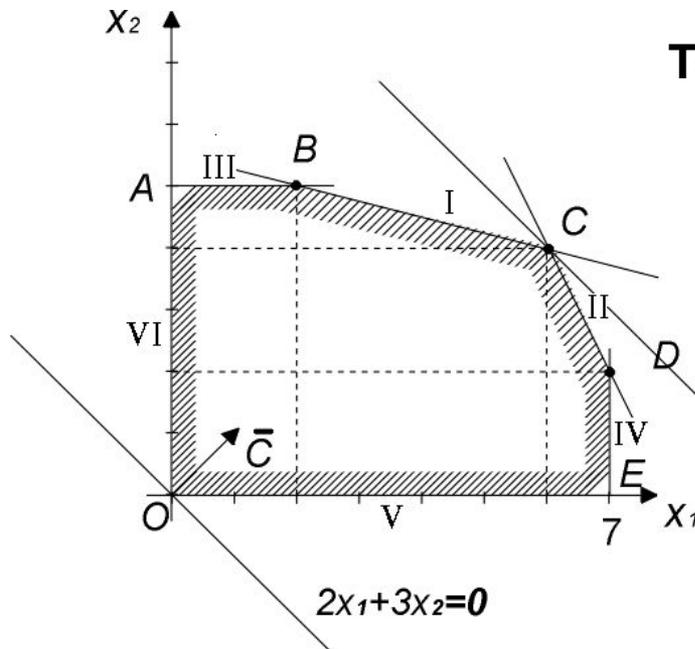
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение.

- Построим многоугольник решений. Для этого в системе ограничений знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и построим полученные прямые:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 = 18 & (I) \\ 2x_1 + x_2 = 16 & (II) \\ x_2 = 5 & (III) \\ 3x_1 = 21 & (IV) \\ x_1 = 0, x_2 = 0 & (V, VI) \end{array} \right.$$

- Найдем полуплоскости, определяемые соответствующими неравенствами и их пересечение. В результате получим многоугольник $OABCDE$



Теперь построим прямую $2x_1 + 3x_2 = 0$
и вектор $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Перемещаем прямую в направлении вектора. Последней ее общей точкой с многоугольником служит точка C .

Координаты C
удовлетворяют уравнениям
прямых I и II

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 + x_2 = 16. \end{cases}$$

Ответ

$$x_1 = 6, x_2 = 4 \quad F_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 24$$

- Следовательно, при изготовлении 6 единиц продукции $P1$ и 4 единицы продукции $P2$, предприятие получит максимальную прибыль, равную 24 единицам

Задача II

Составление рациона

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

при условиях:

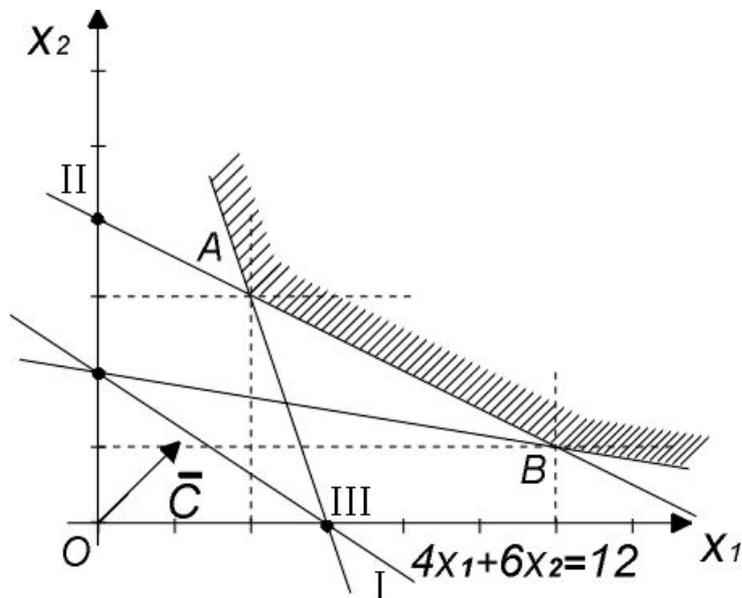
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение.

- Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений знаки неравенств заменим на знаки равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 9 \quad (I) \\ x_1 + 2x_2 = 8 \quad (II) \\ x_1 + 6x_2 = 12 \quad (III) \\ x_1 = 0, x_2 = 0 \quad (IV, V) \end{array} \right.$$

- Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение



построим вектор $\vec{C} = (4, 6)$

и прямую $4x_1 + 6x_2 = 12$

Передвигаем в направлении вектора, ближайшей общей точкой с областью допустимых решений является т. А. В этой точке функция F принимает минимальное значение.

А – точка пересечения прямых II и I , то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

Ответ

$$x_1 = 2, x_2 = 3$$

$$F_{\min} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 26$$

Дневной рацион должен включать в себя 2 кг корма I и 3 кг корма II, при этом затраты будут составлять 26 единиц.

Вопросы

1. Определите общую задачу линейного программирования
2. Определите основную задачу линейного программирования
3. Определите стандартную задачу линейного программирования
4. Теорема
5. Алгоритм решения графическим способом