Линейное программирование

Для ст-ов ЭИФ, 4-ый семестр

Часть 1

Литература:

1. Карпелевич и Садовский. Элементы линейной алгебры и линейного программирования
2. Красс и Чупрынов. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании
3. Заславский. Сборник задач по линейному программированию
4. Рогов. Метод. указания по дисциплине «Высшая математика» раздел «Математическое программирование

1. Системы линейных уравнений и неравенств

1.1. $A_{m\times n}X = B,$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

Пусть $r = rank\ A = rank\ \bar{A} < min\ \{m,n\},$

$x_1,\ \ ,x_r$ **-- базисные неизвестные,**

$x_{r+1},\ \ldots, x_n$ **-- свободные неизвестные и**

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ \cdot \\ x_r = \beta_r - \alpha_{rr+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}x_n. \end{cases}$$

Определение базисного решения

$$X(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, 0, 0, \dots, 0).$$

Метод Гаусса. Пример

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{|cc|cc|c}1 & 2 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -4 & -6\end{array}\right) \quad -$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -6 + 3x_3 + 4x_4 \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса

$$x_1 = 1 + x_3 + x_4 - 2x_2 =$$

$$1 + x_3 + x_4 + 12 - 6x_3 - 8x_4 =$$

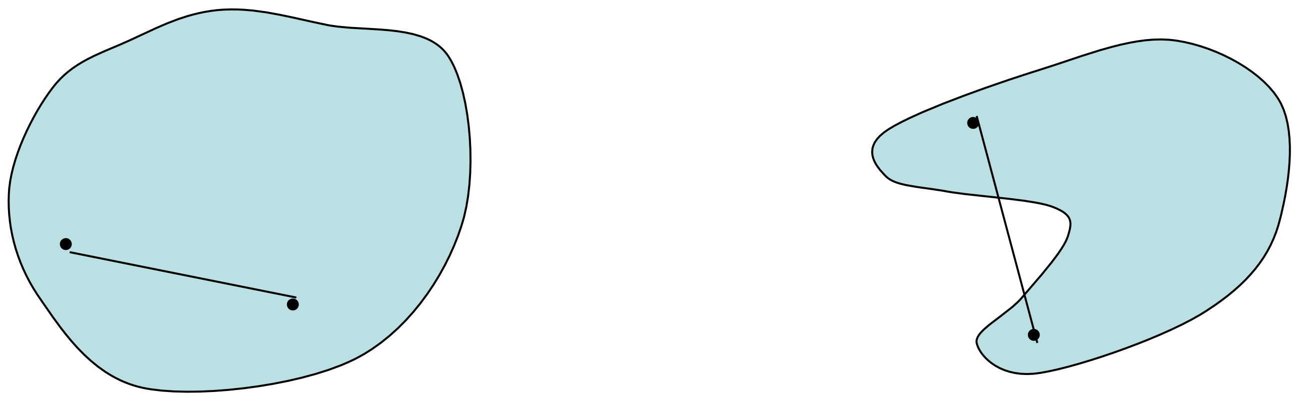
$$13 - 5x_3 - 7x_4$$

$$X(13 - 5x_3 - 7x_4; -6 + 3x_3 + 4x_4; x_3; x_4)$$

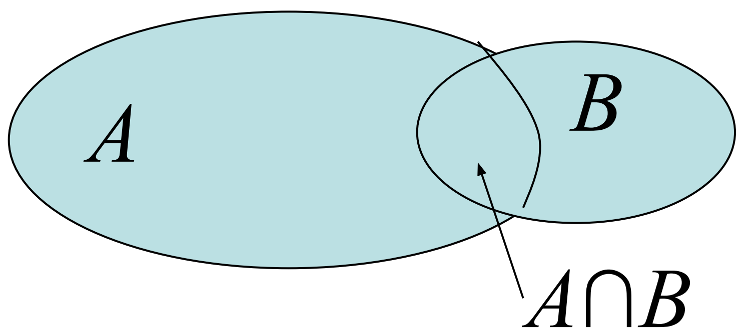
$$X_b(13; -6; 0; 0)$$

1.2. Выпуклая многогранная область

1.2.1. Выпуклое множество точек



Пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством



1.2.3. Гиперплоскость, полупространство

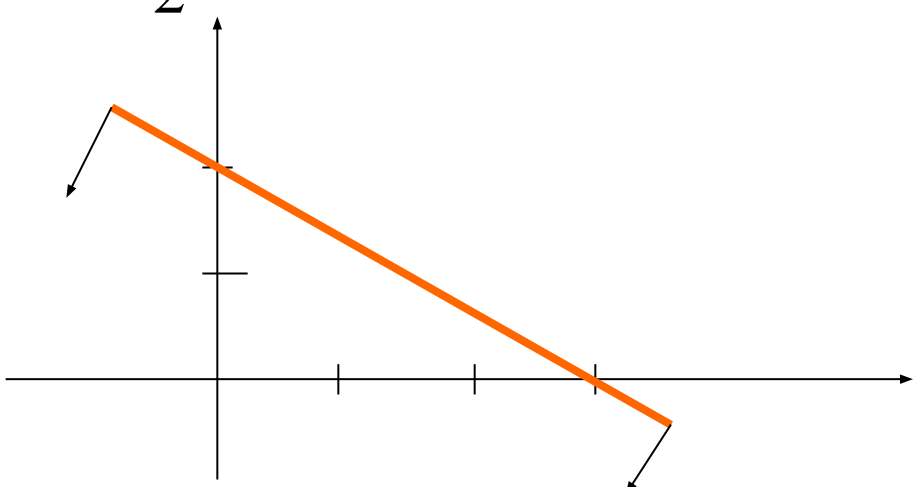
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$$

Примеры: 1. $n=2$

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$ -- **прямая**

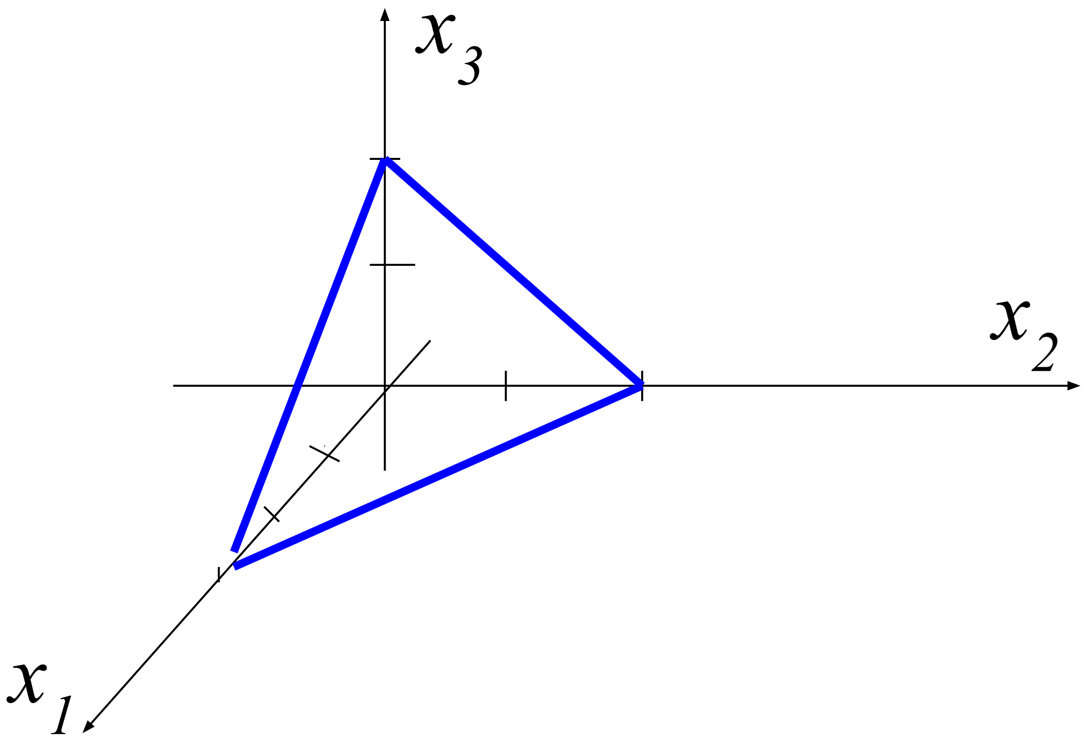
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$ -- **полуплоскость**



2. $n=3$

$$2x_1+3x_2+3x_3=6$$ -- **плоскость**

$$2x_1+3x_2+3x_3\le 6$$ -- **полупространство**



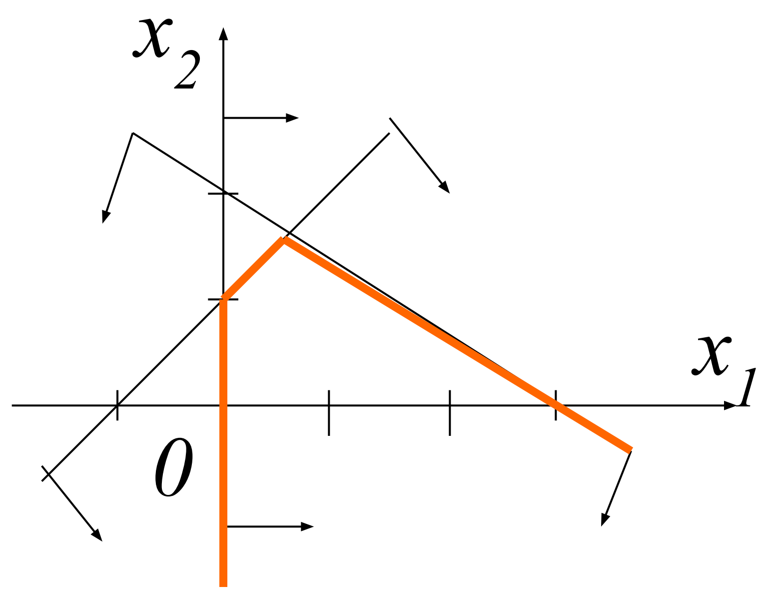
Полупространство является выпуклым множеством.

Пересечение полупространств является выпуклым множеством.

Система линейных неравенств задает в n-мерном пространстве выпуклую многогранную область (замкнутую или нет).

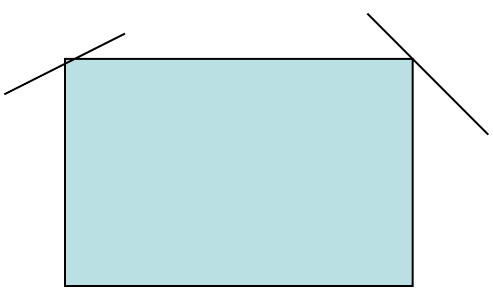
Пример:

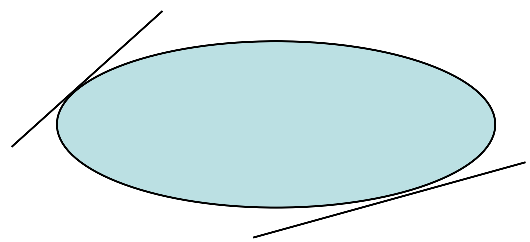
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$



$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m .
\end{cases}
$$

1.3. Крайние (опорные) точки множества





2. Задач линейного программирования (ЗЛП)

2.1. Примеры ЗЛП

2.1.1. Задача об использовании сырья

сырье	$пр_1$	$пр_2$	запасы
C_1	2	3	19
C_2	2	1	13
C_3	0	3	15
C_4	3	0	18
прибыль	7	5	

Пусть x_1 и x_2 -- планируемый выпуск продукции Пр$_1$ и Пр$_2$ соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ \qquad\quad 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \qquad\quad \le 18 \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

$$F(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max.$$

2.1.2. Задача о диете

Питательные в-ва	норма	пр1	пр2
B1 -- белки	b_1	a_{11}	a_{12}
B2 -- жиры	b_2	a_{21}	a_{22}
B3 -- углеводы	b_3	a_{31}	a_{32}
B4 -- витамины	b_4	a_{41}	a_{42}
B5 -- вода	b_5	a_{51}	a_{52}
Стоимость ед в-ва		c_1	c_2

a_{ij} -- **количество i-го питательного в-ва в 1 j-го продукта**

Пусть x_1 **и** x_2 **-- планируемый рацион Пр$_1$ и Пр$_2$ соответственно. Тогда**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \geq b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \geq b_4 \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 \geq b_5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min.$$

2.1.3. Транспортная задача

	B_1	.....	B_j	...	B_m
A_1	c_{11}	. . .	c_{1j}	. . .	c_{im}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. A_i	c_{i1}	. . .	c_{ij}	. . .	c_{im}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_n	c_{n1}	. . .	c_{ij}	. . .	c_{nm}

c_{ij} – **стоимость перевозки 1 груза со станции** A_i **на станцию** B_j

x_{11}	. . .	x_{1j}	. . .	x_{1m}	a_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{i1}	. . .	x_{ij}	. . .	x_{im}	a_i
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_{n1}	. . .	x_{nj}	. . .	x_{nm}	a_n
b_1	. . .	b_j	. . .	b_m	

x_{ij} -- **количество груза, перевозимое со ст.** A_i **на ст.** B_j,

a_i -- **запасы на ст.** A_i ,

b_j -- **потребности на ст.** B_j .

$$\sum_i a_i = \sum_j b_j$$

Все запасы должны быть вывезены, и все потребности должны быть удовлетворены

$$\begin{cases} x_{11} + \ldots + x_{1m} = a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1} + \ldots + x_{nm} = a_n \\ x_{11} + \ldots + x_{n1} = b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathrm{x}_{1\mathrm{m}} + \ldots + \mathrm{x}_{\mathrm{nm}} = \mathrm{b}_{\mathrm{m}} \end{cases} \qquad x_{ij} \geq 0 \; \forall i, j$$

$$F(x) = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

2.2. Виды ЗЛП

2.2.1. Общая ЗЛП (ОбЗЛП)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \\ a_{k+11}x_1 + \cdots + a_{k+1n}x_n \geq b_{k+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}\mathrm{x}_1 + \cdots + a_{mn}\mathrm{x}_\mathrm{n} \geq \mathrm{b}_\mathrm{m} \end{cases}$$

$$x_i \geq 0$$

$$F(x) = c_0 + \sum_i c_i x_i \to \text{opt}$$

2.2.2. Основная ЗЛП (ОсЗЛП)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = c_0 + \sum_i c_i x_i \to \min$$

2.2.3. Каноническая ЗЛП (КЗЛП)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
x_i \ge 0
\end{cases}
$$

$$
F(x) = c_0 + \sum_i c_i x_i \to \max
$$

2.2.4. Переход от одного вида ЗЛП к другому

КЗЛП → ОсЗЛП

$$
\begin{cases}
0 \le b_1 - a_{11}x_1 - \dots - a_{1n}x_n = x_{n+1} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \le b_m - a_{m1}x_1 - \dots - a_{mn}x_n = x_{n+m} \\
x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+m
\end{cases}
$$

$$
F_1(x) = -F(x) = -c_0 - \sum_i c_i x_i \to \min
$$

Опуская левые неравенства, получим систему линейных уравнений

Пример

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ 4x_1 + x_2 \le 5 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2.$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$
\begin{cases}
0 \le 10 - 3x_1 - 4x_2 = x_3 \\
0 \le 5 - 4x_1 - x_2 = x_4 \\
0 \le 2 - x_2 = x_5
\end{cases}
$$

$$x_i \ge 0, i = 1,...,5$$

$$-F(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

Опуская левые неравенства, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = 10 \\ 4x_1 + x_2 \quad - x_4 & = 5 \\ x_2 \quad - x_5 & = 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1,\ldots,5$$

$$-F(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

ОсЗЛП → КЗЛП

Пусть r – ранг матрицы системы уравнений п.2.2.2. и имеется решение системы ограничений

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1r+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}x_n \geq 0 \\ \cdot \\ x_r = \beta_r - \alpha_{rr+1}x_{r+1} - \dots - \alpha_{rn}x_n \geq 0 \end{cases}$$

Опуская равенства слева, получим систему линейных неравенств.

$$F_1(x) = -F(x) = \gamma_0 + \sum_{i=r+1}^{n} \gamma_i x_i \to \max$$

Пример

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1,...,4.$$

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & -5 & -5 & -11 & -21 \\ 0 & -5 & -5 & -11 & -21 \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{21}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 - 3x_3 - 4x_4 \\ \qquad\quad x_2 = \frac{21}{5} - x_3 - \frac{11}{5} x_4 \end{cases}$$

$$x_1 = 10 - 3x_3 - 4x_4 - \tfrac{42}{5} + 2x_3 + \tfrac{22}{5} x_4 =$$

$$= \tfrac{8}{5} - x_3 + \tfrac{2}{5} x_4$$

$$-F(x) = -\tfrac{8}{5} + x_3 - \tfrac{2}{5} x_4 - \tfrac{21}{5} +$$

$$+ x_3 + \tfrac{11}{5} x_4 - x_3 - x_4 =$$

$$= -\tfrac{29}{5} + x_3 + \tfrac{4}{5} x_4$$

$$\begin{cases} 5x_3 - 2x_4 \le 8 \\ 5x_3 + 11x_4 \le 21 \end{cases}$$

$$x_{3,4} \ge 0.$$

$$-F(x) = -\tfrac{29}{5} + x_3 + \tfrac{4}{5}x_4 \to \max$$

3. Геометрический смысл ЗЛП и геометрический способ ее решения

Рассмотрим КЗЛП. Среди всех точек замкнутой выпуклой многогранной области требуется найти ту, в которой целевая функция принимает максимальное значение. Решение находится среди опорных точек области.

Пример:

Рассмотрим КЗЛП -- задачу об использовании сырья

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ \qquad\quad 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \qquad\quad\ \le 18 \\ x_{1,2} \ge 0. \end{cases}$$

$$F(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max.$$

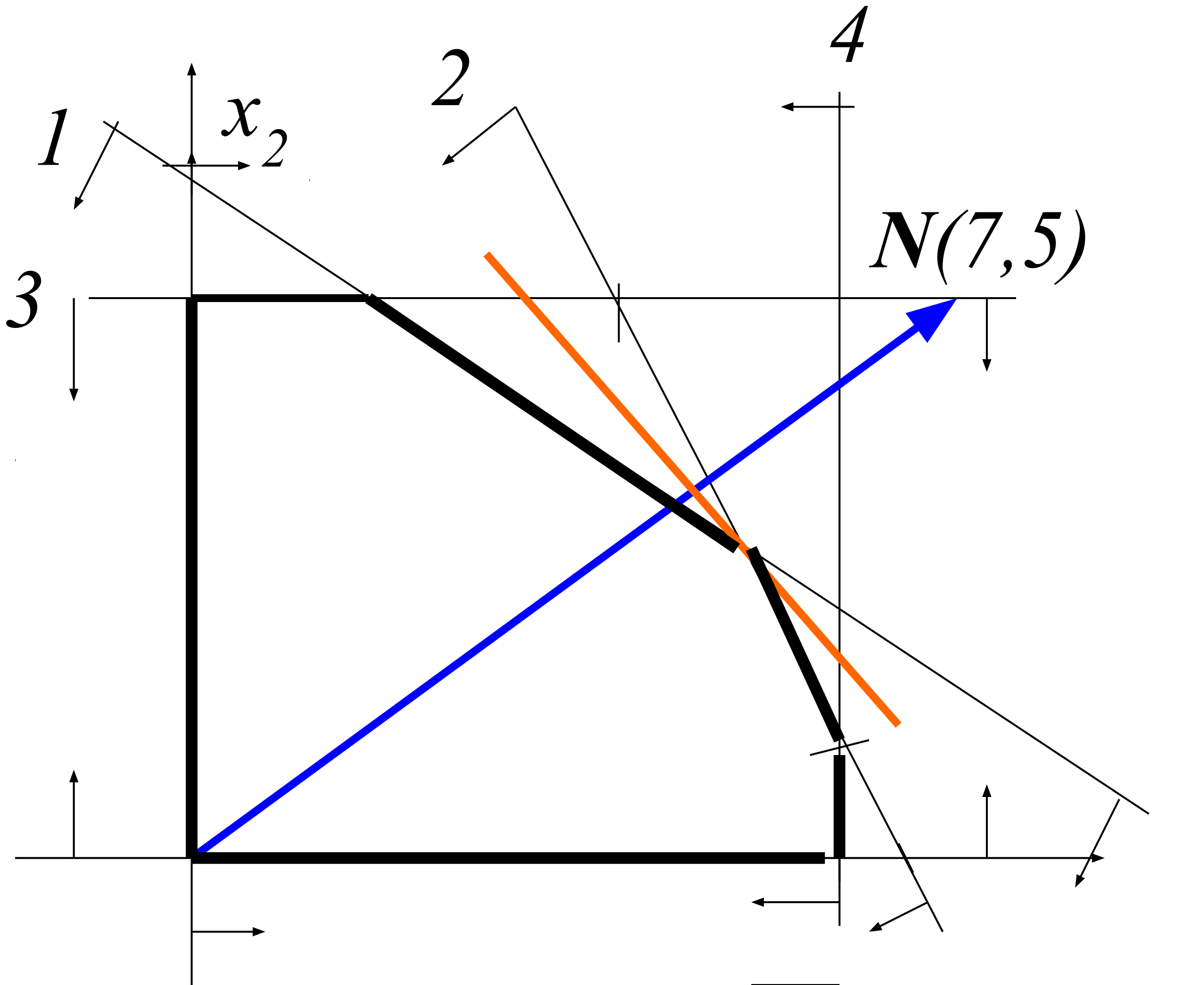
1. $2x_1 + 3x_2 = 19,$

2. $2x_1 + x_2 = 13,$

3. $3x_2 = 15,$

4. $3x_1 = 18.$

$x_{1,2} \geq 0$



***X*(5,3)**

$F_{max} = 50$

4. Симплекс-метод

4.1. Перебор базисных решений

Рассмотрим ОсЗЛП -- задачу об использовании сырья.

$$\begin{cases} x_3 = 19 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 13 - 2x_1 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \\ x_6 = 18 - 3x_1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, 6, \quad F(x) = -7x_1 - 5x_2 \to \min$$

$$X_1(0,0,19,13,15,18); \quad F_1 = 0.$$

Увеличивая x_1, **мы уменьшаем** $F(x)$

x_3, x_4, x_6 при этом уменьшаются и раньше всех обращается в нуль x_6

$$\begin{cases} x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_2 = 7 - 3x_2 + \frac{2}{3}x_6 \\ x_4 = 1 - x_2 + \frac{2}{3}x_6 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots ,6; F(x) = -42 - 5x_2 + \tfrac{7}{3}x_6 \to \min .$$

$$X_2(6,0,7,1,15,0); \qquad F_2 = -42.$$

Увеличивая x_2**, мы уменьшаем** $F(x)$

x_3, x_4 ,x_5 при этом уменьшаются и раньше всех обращается в нуль x_4

$$
\begin{cases}
x_1 = 6 - \frac{1}{3} x_6 \\
x_2 = 1 - x_4 + \frac{2}{3} x_6 \\
x_3 = 4 + 3x_4 - \frac{4}{3} x_6 \\
x_5 = 12 + 3x_4 - 2x_6
\end{cases}
$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 6; F(x) = -47 + 5x_4 - x_6 \to \min .$$

$$X_3(6,1,7,0,12,0); \quad F_3 = -47.$$

Увеличивая x_6, мы уменьшаем $F(x)$

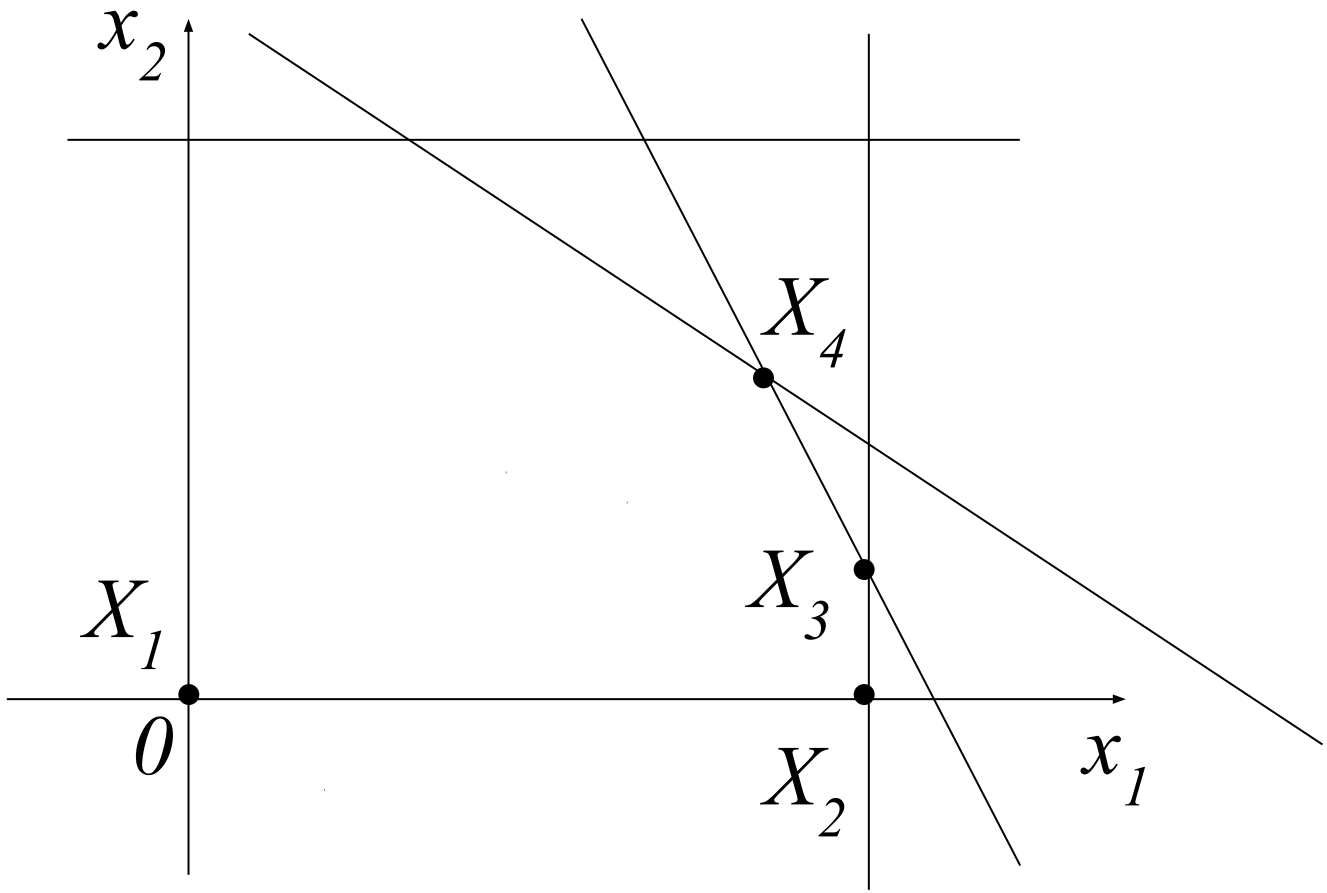
x_1, x_3, x_5 при этом уменьшаются и раньше всех обращается в нуль x_3

$$\begin{cases} x_1 = 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = 6 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_6 = 3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 6; F(x) = -50 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4 \to \min.$$

$$X_4(5,3,0,0,6,3); \quad F_4 = -50.$$

Решение оптимально.



x_2
X_4
X_3
X_1
0
X_2
x_1

4.2. Алгоритм симплекс-метода

4.2.1. Найти исходное допустимое базисное решение

4.2.2. Выбрать свободную неизвестную, которая входит в выражение для целевой функции со знаком «--». Пусть это x_i. Если таковой нет -- решение оптимально.

4.2.3. Определить базисные неизвестные, которые уменьшаются при увеличении x_i, и выбрать ту, которая раньше других обращается нуль. Пусть это x_j. Если таковых нет, задача оптимального решения не имеет.

4.2.4. Поменять x_i и x_j ролями и выразить новый набор базисных неизвестных через свободные

4.2.5. См. п. 4.2.2.

4.3. Алгебра симплекс-метода. Симплекс-таблица

1. Записать исходное базисное решение и целевую функцию в стандартном виде

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - (\alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1j}x_j + \dots + \alpha_{1n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = \beta_i - (\alpha_{ir+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{ij}x_j + \dots + \alpha_{in}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{x}_r = \beta_r - (\alpha_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rj}x_j + \dots + \alpha_{rn}x_n) \end{cases}$$

$$F(x) = \gamma_0 - (\gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_j x_j + \dots + \gamma_n x_n)$$

2. Составить таблицу

	Св.ч.	x_{r+1}	. . .	x_j	. . .	x_n
F	γ_0	γ_{r+1}	. . .	γ_j	. . .	γ_n
x_1	β_1	α_{1r+1}	. . .	α_{1j}	. . .	α_{1n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_i	β_i	α_{ir+1}	. . .	α_{ij}	. . .	α_{in}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
x_r	β_r	α_{rr+1}	. . .	α_{rj}	. . .	α_{rn}

**Столбец x_j называется генеральным столбцом,
строка x_i -- генеральной строкой,
элемент α_{ij} -- генеральным элементом**

Правило выбора ген. ст-ца:
выбирается любой столбец, у которого в первой строке положительное число ($\gamma_j > 0$)

Правило выбора генерального элемента:
из всех положительных чисел генерального столбца (не считая первой строки) выбрать то, для которого минимально отношение к нему свободного члена ($\alpha_{ij} > 0$, $\beta_j/\alpha_{ij} \to \min$)

3. **Выбрать генеральный столбец и генеральную строку**
4. **Пересчитать симплекс-таблицу**

$$\begin{cases} x_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\alpha_{ir+1}}{\alpha_{ij}} x_{r+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_i + \cdots + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{ij}} x_n\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_k = \beta_k - (\alpha_{kr+1} x_{r+1} + \cdots + \end{cases}$$

$$+\alpha_{kj}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\alpha_{ir+1}}{\alpha_{ij}} x_{r+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_i + \cdots + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{ij}} x_n\right)\right) +$$

$$+ \cdots + \alpha_{kn} x_n) = \frac{\beta_k \alpha_{ij} - \alpha_{kj} \beta_i}{\alpha_{ij}} -$$

$$\left(\frac{\alpha_{kr+1}\alpha_{ij} - \alpha_{kj}\alpha_{ir+1}}{\alpha_{ij}} x_{r+1} + \cdots + \frac{\alpha_{kn}\alpha_{ij} - \alpha_{kj}\alpha_{in}}{\alpha_{ij}} x_n\right),$$

$$F(x) = \gamma_0 - (\gamma_{r+1} x_{r+1} + \ldots +$$

$$+ \gamma_i \left(\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\alpha_{ir+1}}{\alpha_{ij}} x_{r+1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{ij}} x_i + \ldots + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{ij}} x_n \right)\right) +$$

$$+ \ldots + \gamma_n x_n) =$$

$$= \frac{\gamma_0 \alpha_{ij} - \gamma_j \beta_i}{\alpha_{ij}} - \left(\frac{\gamma_{r+1} \alpha_{ij} - \gamma_j \alpha_{ir+1}}{\alpha_{ij}} x_{r+1} + \right.$$

$$\left. + \ldots - \frac{\gamma_j}{\alpha_{ij}} x_i + \ldots + \frac{\gamma_n \alpha_{ij} - \gamma_j \alpha_{in}}{\alpha_{ij}} x_n \right).$$

Правила пересчета симплекс-таблицы:

- **на месте генерального элемента пишется величина, ему обратная**
- **все элементы генеральной строки (кроме генерального эл-та) делятся на генеральный элемент**
- **все элементы генерального столбца (кроме генерального эл-та) делятся на генеральный элемент и берутся с противоположным знаком**
- **все остальные элементы подсчитываются по правилу прямоугольника:**

$$\widetilde{\gamma}_0 = \frac{\gamma_0 \alpha_{ij} - \gamma_j \beta_i}{\alpha_{ij}}, \qquad \widetilde{\gamma}_\nu = \frac{\gamma_\nu \alpha_{ij} - \gamma_j \alpha_{i\nu}}{\alpha_{ij}},$$

$$\widetilde{\beta}_\mu = \frac{\beta_\mu \alpha_{ij} - \beta_i \alpha_{\mu j}}{\alpha_{ij}}, \qquad \widetilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu} \alpha_{ij} - \alpha_{i\nu} \alpha_{\mu j}}{\alpha_{ij}}$$

4.4. Порядок работы по симплекс-методу

4.4.1. Найти исходное допустимое базисное решение.

4.4.2. Записать найденное решение в стандартной форме и составить симплекс-таблицу.

4.4.3. Выбрать генеральный столбец. Если генеральный столбец выбрать нельзя, решение оптимально.

4.4.4. Выбрать генеральную строку. Если генеральную строку выбрать нельзя, задача оптимального решения не имеет, т.к. целевая функция не ограничена снизу.

4.4.5. Пересчитать симплекс-таблицу.

4.4.6. См. п. 4.4.3.

Пример: Задача об использования сырья

$$\begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2) \\ x_5 = 15 - (\quad 3x_2) \\ x_6 = 18 - (3x_1 \quad) \end{cases}$$

$$F(x) = -(7x_1 + 5x_2)$$

	Св.ч.	x_1	x_2
F	0	7	5
x_3	19	2	3
x_4	13	2	1
x_5	15	0	3
x_6	18	**3**	0

	Св. ч.	x_6	x_2
F	-42	-7/3	5
x_3	7	-2/3	3
x_4	1	-2/3	**1**
x_5	15	0	3
x_1	6	1/3	0

	Св.ч.	x_6	x_4
F	-47	1	-5
x_3	4	**4/3**	-3
x_2	1	-2/3	1
x_5	12	2	-3
x_1	6	1/3	0

	Св.ч.	x_3	x_4
F	-50	-3/4	-11/4
x_6	3	3/4	-9/4
x_2	3	1/2	
x_5	6	-3/2	
x_1	5	-1/4	

$$X(5,3,0,0,6,3),$$

$$F_{\min} = -50.$$

4.5. Теорема. При решении ОсЗЛП симплекс-методом за конечное число шагов мы приходим либо к оптимальному решению, либо к выводу, что задача оптимального решения не имеет, т.к. целевая функция не ограничена снизу.

5. М-метод

(метод искусственного базиса)

Пусть имеется ОсЗЛП

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=B_{m\times 1},\quad x_j\geq 0,\ j=1,\ldots,n,$$

$$F(x)=c_0+\sum_j c_jx_j\to\min.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Можно считать, что все правые части неотрицательны

Введем новые переменные

$$\begin{cases} \xi_1 = b_1 - (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_m = b_m - (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n) \end{cases}$$

И рассмотрим следующую ОсЗЛП

$$\Xi_{m\times 1} = B_{m\times 1} - A_{m\times n}X_{n\times 1},\ b_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m$$

$$\xi_i \geq 0,\ i = 1,\dots,m,\ x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n$$

$$G(x) = F(x) + M\sum_{i=1}^{m}\xi_i \to \min$$

M **-- достаточно большое положительное число**

Построенная задача называется M—задачей.

5.1. Основные теоремы

Теорема 1. Если M—задача имеет оптимальное решение, в котором все ξ_i перешли в свободные неизвестные или обратились в нуль, то исходная задача имеет оптимальное решение и при этом $F_{min}=G_{min}$

Теорема 2. Если M—задача имеет оптимальное решение, в котором хотя бы одна переменная ξ_i осталась в числе базисных неизвестных и не обратилась в нуль, то исходная задача противоречива.

Теорема 3. Если M—задача оптимального решения не имеет, то исходная задача также оптимального решения не имеет. (не обязательно целевая функция не ограничена снизу).

5.2 Примеры:

1.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20 \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

$$F(x) = x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 \to \max.$$

Составим M--задачу

$$\begin{cases} \xi_1 = 10 - (3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5) \\ \xi_2 = 20 - (6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5) \\ \xi_3 = 30 - (10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 5$$

$$G(x) = 60M - [(1+19M)x_1 + (1+3M)x_2 +$$

$$(-1+6M)x_3 + (1+10M)x_4 - (2+13M)x_5] \to \min$$

Симплекс-таблица:

↑

←

	Св. ч.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
F	0	1	1	-1	1	-2
M	60	19	3	6	10	-13
ξ_1	10	3	**1**	1	1	-2
ξ_2	20	6	1	2	3	-4
ξ_3	30	10	1	3	6	-7

	Св.ч.	x_1	x_3	x_4	x_5
F	-10	-2	-2	0	0
M	30	10	3	7	-7
x_2	10	3	1	1	-2
ξ_2	10	3	1	2	-2
ξ_3	20	7	2	**5**	-5

	Св.ч.	x_1	x_3	x_5
F	-10	-2	-2	0
M	2	1/5	1/5	0
x_2	6	8/5	3/5	-1
ξ_2	2	1/5	**1/5**	0
x_4	4	7/5	2/5	-1

	св.ч.	x_1	x_5
F	10	0	0
x_2	0		
x_3	10	1	
x_4	0		

$$X_M(0,0,10,0,0,0,0,0), \qquad G_{\min} = 10,$$

$$X(0,0,10,0,0), \qquad F_{\min} = 10.$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = 1, \ldots, 4,$$

$$F(x) = x_1 + 10x_2 - x_3 - 2x_4 \to \max .$$

Составим М—задачу и симплекс-таблицу

$$
\begin{cases}
\xi_1 = 1 - (x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4) \\
\xi_2 = 2 - (-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4) \\
\xi_3 = 5 - (x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4)
\end{cases}
$$

$$
x_j \geq 0,\ \ j = 1, \ldots, 4,\ \xi_{\mathrm{i}} \geq 0, \mathrm{i} = 1,2,3,
$$

$$
G(x) = 8M - [(1 + M)x_1 + (10 + 9M)x_2
$$

$$
+ (-1 + 3M)x_3 - (2 + M)x_4] \to \min .
$$

	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4
F	0	1	10	-1	-2
M	8	1	9	3	-1
ξ_1	1	1	**2**	-1	-1
ξ_2	2	-1	2	3	1
ξ_3	5	1	5	1	1

	С.ч.	x_1	x_3
F	-5	-4	4
M	7/2	-7/2	15/2
x_2	1/2	1/2	-1/2
ξ_2	1	-2	**4**

	Си.ч.	x_1	x_4
F	-6	-2	1
M	13/8	1/4	-1/4
x_2	5/8	**1/4**	-1/4
x_3	1/4	-1/2	½
ξ_3	13/8	1/4	-1/4

	Св. ч.	x_2	x_4
F	-1	8	-1
M	1	-1	0
x_1	5/2	4	-1
x_3	3/2	2	0
ξ	1	-1	0

Исходная задача противоречива

3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,$$

$$F(x) = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \to \max.$$

М-задача

$$\begin{cases} \xi_1 = -(x_1 + x_2 - x_3 + x_4) \\ \xi = 11 - (x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\quad j = 1,2,3,4,\quad \xi_i \geq 0,\quad i = 1,2,$$

$$G = 11M - [(1 + 2M)x_1 + (-4 + 15M)x_2 +$$

$$(3 + 9M)x_3 + (10 - 9M)x_4] \to \min.$$

	С.ч.	x_1	x_2	x_3	x_4
F	0	1	-4	3	10
M	1	2	15	9	-9
ξ_1	0	1	1	-1	1
ξ_2	11	1	14	**10**	→ -10

↓ ↑

	с.ч.	x_1	x_2
F	-3,9	0,7	-8,2
M	1,1	1,1	2,4
ξ_1	1,1	1,1	2,4

Задача решений не имеет, т.к. целевая функция не ограничена сверху

6. Теория двойственности

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,$$

$$F(x) = 7x_1 + 5x_2 \to \max .$$

x_j – планируемое кол – во изготовленной продукции

$y_i, i = 1,2,3,4,$ – продажная стоимость единицы i-го сырья

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \qquad\quad + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_3 \qquad\quad \geq 5 \end{cases}$$

$y_i \geq 0, i = 1,2,3,4,$

$$F^*(y) = 19y_1 + 13y_2 + 15y_3 + 18y_4 \to \min.$$

6.1. Задача, двойственная к КЗЛП

По определению

1. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи
2. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи
3. Матрицы из коэффициентов двух задач получаются друг из друга транспонированием
4. Все ограничения имеют вид неравенств «≥»
5. Переменные двойственной задачи должны быть неотрицательными
6.Правые части системы ограничений двойственной задачи совпадают с коэффициентами при неизвестных в целевой функции исходной задачи

7. Коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи совпадают с правыми частями системы ограничений исходной задачи
8. Свободные члены в целевых функциях двух задач совпадают
9. Целевая функция двойственной задачи минимизируется

Задача, двойственная к двойственной совпадает с исходной

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} = \begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{matrix}$$

Исходная КЗЛП

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} \le B_{m\times 1}$$

$$x_j \ge 0$$

$$F(x) = c_0 + \sum_j c_j x_j \to \max$$

Двойственная задача

$$A^T_{n\times m}Y_{m\times 1} \ge C_{n\times 1}$$

$$y_i \ge 0$$

$$F^*(y) = c_0 + \sum_i b_i y_i \to \min$$

Двойственная КЗЛП

$$-A^T_{n\times m}Y_{m\times 1} \le -C_{n\times 1}$$

$$y_i \ge 0$$

$$-F^*(y) = -c_0 - \sum_i b_i y_i \to \max$$

Двойственная к двойственной КЗЛП

$$-A_{m\times n}^{TT}Z_{n\times 1} \geq -B_{m\times 1}$$

$$z_j \geq 0$$

$$-F^{**}(z) = -c_0 - \sum_j c_j z_j \to \min$$

$$A_{m\times n}X_{n\times 1} \leq B_{m\times 1}$$

$$x_j \geq 0$$

$$F(x) = c_0 + \sum_i c_j x_j \to \max$$

6.2. Задача, двойственная к ОбЗЛП

1. Все ограничения-неравенства согласованы со способом оптимизации целевой функции, а именно, если целевая функция минимизируется, то все знаки неравенства имеют вид «≥» и наоборот
2. Каждой переменной исходной задачи соответствует ограничение двойственной задачи
3. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи
4. Матрицы из коэффициентов двух задач получаются друг из друга транспонированием
5. Переменные двойственной задачи, соответствующие неравенствам в исходной задаче должны быть неотрицательными

6. Ограничения, соответствующие неотрицательным переменным исходной задачи должны иметь вид неравенств противоположного смысла по сравнению с неравенствами исходной задачи 7. Правые части системы ограничений двойственной задачи совпадают с коэффициентами при неизвестных в целевой функции исходной задачи

8. Коэффициенты при неизвестных в целевой функции двойственной задачи совпадают с правыми частями системы ограничений исходной задачи

9. Свободные члены в целевых функциях двух задач совпадают

10. Целевая функция двойственной задачи оптимизируется в противоположном смысле

Пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_{1,3,5} \ge 0$$

$$F(x) = 1 + x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \ge -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_{1,3,5} \ge 0$$

$$F(x) = 1 + x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \to \min.$$

$$
\begin{cases}
y_1 - 2y_2 + y_3 \le 1 \\
-2y_1 + y_2 + 3y_3 = 1 \\
y_1 + y_2 - y_3 \le -1 \\
3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = 2 \\
-y_1 - y_2 - 3y_3 \le 1
\end{cases}
$$

$$y_{2,3} \ge 0$$

$$F^*(y) = 1 + 2y_1 - 3y_2 + y_3 \to \max.$$

6.3. Теоремы теории двойственности

1. **Первая теорема двойственности**

$$F_{opt} = F^*_{opt}$$

2. Основное неравенство теории двойственности

Если, например, $F(x) \to min$, **то для всех допустимых** x **и** y

$$F(x) \geq F^*(y)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + \dots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \forall j \qquad\qquad y_i \text{ – любого знака}$$

$$(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n)y_i = b_i y_i,$$

$$(a_{1j}y_1 + \dots + a_{mj}y_m)x_j \le c_j x_j$$

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_j y_i = \sum_i b_i y_i,$$

$$\sum_j \sum_i a_{ij} y_i x_j \le \sum_j c_j x_j,$$

$$\sum_i b_i y_i = \sum_i \sum_j a_{ij} x_j y_i = \sum_j \sum_i a_{ij} y_i x_j \le \sum_j c_j x_j$$

$$F^*(y) \le F(x).$$

3. Вторая теорема двойственности

Пусть имеются два допустимых решения двух взаимно двойственных задач. Для того, чтобы эти решения были оптимальными, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. Если в каком-либо ограничении одной из задач не достиглось строгое равенство, то соответствующая переменная другой задачи должна обратиться в нуль.

2. Если какая-либо переменная одной из задач отлична от нуля, то в соответствующем ограничении другой задачи должно достигаться строгое равенство

6.3. Решение двух взаимно двойственных задач

1.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, 6,$$

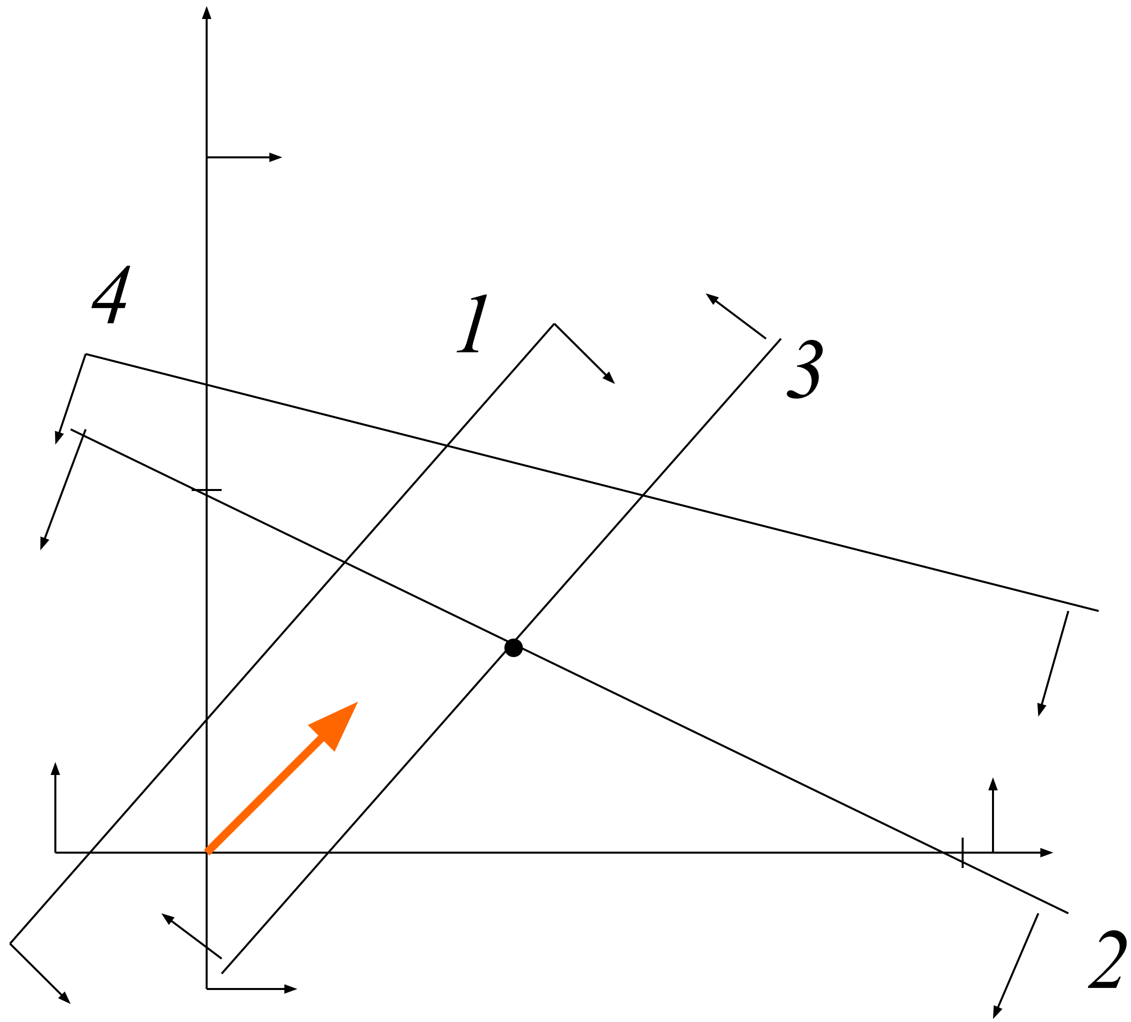
$$F(x) = x_1 + 5x_2 + x_3 + 10x_4 + x_5 + 3x_6 \to \min.$$

Составить двойственную задачу, решить ее и Восстановить решение исходной задачи

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 \le 1 \\ y_1 + 2y_2 \le 5 \\ y_1 - y_2 \le 1 \\ y_1 + 3y_2 \le 10 \\ -y_2 \le 1 \\ -y_2 \le 3 \end{cases}$$

$$y_{1,2} \ge 0$$

$$F^*(y) = y_1 + y_2 \rightarrow \max$$



$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ y_1 - y_2 = 1 \end{cases}$$

$$Y\left(\tfrac{7}{3},\tfrac{4}{3}\right), \qquad F^*_{\max}=\tfrac{11}{3}$$

$$x_1=x_4=x_5=x_6=0$$

$$\begin{cases} x_2+x_3=1 \\ 2x_2-x_3=1 \end{cases}$$

$$x_2=\tfrac{2}{3}, \quad x_3=\tfrac{1}{3}.$$

$$X\left(0,\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},0,0,0\right), \quad F_{\min}=\tfrac{11}{3}.$$

2. Двойственный симплекс-метод

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le -1 \end{cases}$$

$$x_{1,2,3} \ge 0,$$

$$F(x) = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -1 \\ 2y_1 - y_2 \ge -2 \\ -3y_1 - y_2 \ge -3 \end{cases}$$

$$y_{1,2} \ge 0,$$

$$F^*(y) = y_1 - y_2 \to \min.$$

$$\begin{cases} x_4 = 1 - (-x_1 + 2x_2 - 3x_3) \\ x_5 = -1 - (2x_1 - x_2 - x_3) \end{cases}$$

$$-F(x) = -(-x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

$$\begin{cases} y_3 = 1 - (y_1 - 2y_2) \\ y_4 = 2 - (-2y_1 + y_2) \\ y_5 = 3 - (3y_1 + y_2) \end{cases}$$

$$F^*(y) = -(-y_1 + y_2).$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \end{array}$$

	С.ч.	x_1	x_2	x_3
-F	0	-1	-2	-3
x_4	1	-1	2	-3
x_5	-1	2	**-1**	-1

	С.ч.	y_1
F*	0	-1
y_3	1	1
y_4	2	-2
y_5	3	3

	С.ч.	x_1	x_5	x_3
-F	2	-5	-2	-1
x_4	-1	3	2	**-5**
x_2	1	-2	-1	1

	С.ч.	y_1
F*	-2	1
y_3	5	-3
y_4	2	-2
y_5	1	**5**

	С.ч.	x_1	x_5	x_4
-F	11/5	-28/5	-12/5	-1/5
x_3	1/5	-2/5	-2/5	-1/5
x_2	4/5	-7/5	-3/5	1/5

	С.ч.	y_5	y_4
F*	-11/5	-1/5	-1/5
y_3	28/5	3/5	7/5
y_2	12/5	2/5	3/5
y_1	1/5	1/5	-1/5

$$X(0,\tfrac{4}{5},\tfrac{1}{5},0,0), F_{\max} = -\tfrac{11}{5}; Y(\tfrac{1}{5},\tfrac{12}{5},\tfrac{28}{5},0,0), F_{\min} = -\tfrac{11}{5}.$$

3. Двойственный М-метод

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 \geq 1 \\ 2x_1 \qquad\qquad + 4x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \to \min.$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 2y_5 = 3 \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 6y_4 \qquad\qquad = 5 \\ 3\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2 + 2\mathrm{y}_3 + 6\mathrm{y}_4 + 4\mathrm{y}_5 = 4 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,5,$$

$$F^*(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max.$$

$$x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; \eta_1 \;\; \eta_2 \;\; \eta_3 \;\; \eta_4 \;\; \eta_5$$

$$\boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes \quad \boxtimes$$

$$\xi_1 \;\; \xi_2 \;\; \xi_3 \;\; y_1 \;\; y_2 \;\; y_3 \;\; y_4 \;\; y_5$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 3 - (y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 2y_5) \\ \xi_2 = 5 - (2y_1 + 3y_2 + y_3 + 6y_4 \qquad\qquad) \\ \xi_3 = 4 - (3y_1 + y_2 + 2y_3 + 6y_4 + 4y_5) \end{cases}$$

$$G = 12M - [(6M+1)y_1 + (6M+1)y_2 + (8M+1)y_3 +$$

$$(18M+1)y_4 + (6M+1)y_5] \to \min .$$

	Св.ч.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-F*	0	1	1	1	1	1
M	12	6	6	**6**	18	6
ξ_1	3	1	2	3	6	2

	Св.ч.	y_1	y_2	y_3	ξ_1	y_5
-F*	-3/6	5/6	4/6	3/6	-1/6	4/6
M	3	3	0	-3	-3	0
y_4	5/6	1/6	2/6	3/6	1/6	2/6
ξ_2	2	1	1	-2	-1	-2
ξ_3	1	**2**	-1	-1	-1	2

	Св.ч.	ξ_3	y_2	y_3	ξ_1	y_5
-F*	-11/12	-5/12	13/12	11/12	3/12	-3/12
M	3/2	-3/2	3/2	-3/2	-3/2	-3
y_4	5/12	-1/12	5/12	7/12	3/12	2/12
ξ_2	3/2	-1/2	**3/2**	-3/2	-1/2	-6/2
y_1	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2

	с.ч.	ξ_3	ξ_2	y_3	ξ_1	y_5
-F*	-2	-1/18	-13/18	2	1/18	2
M	0	-1	-1	0	-1	0
y_4	0	1/18	-5/18	1	7/18	**1**
y_2	1	-1/3	2/3	-1	-1/3	-2
y_1	1	1/3	1/3	-1	-2/3	0

	С.ч.	ξ_3	ξ_2	y_3	ξ_1	y_4
-F*	-2	-1/6	-1/6	0	-1/6	-2
M	0	-1	-1	0	-1	0
y_5	0	1/18	-5/18	1	7/18	1
y_2	1					
y_1	1					

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, y_1, y_2, y_3 y_4, y_5$$

$$Y(0,0,0,1,1,0,0,0), \qquad F^*_{\max} = 2.$$

$$X(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, 0,0,0,2,0), \; F_{\min} = 2.$$

$$x_1, x_2, x_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$$