Знания не всегда могут быть описаны точно – часто встречаются так называемые «нечеткие знания». Люди повседневно решают проблемы и делают заключения в среде «нечетких знаний», а для того чтобы интеллектуальные системы обладали такими возможностями как гибкость, широкий кругозор, адаптируемость, необходимо представление и использование нечетких знаний. Все нечеткости, с которыми имеет дело инженерия знаний, можно классифицировать следующим образом:

1) недетерминированность выводов;
2) неоднозначность (зашумленный сигнал);
3) ненадежность (в силу ограниченности точности прибора);
4) неполнота (пропуск значений в таблице факторы/испытания);
5) собственно нечеткость (лингвистические аспекты языка).

Методологической основой для формализации нечетких знаний является теория нечетких множеств [5].

Когда мы говорим «Старик», то неясно, что мы имеем в виду: старше 50, старше 60 или старше 70? Одним из методов изучения множеств без уточнения их границ является теория нечетких множеств, которая была предложена Л. Заде в 1965 г. и продолжает развиваться. Эти исследования связаны также с нечеткими выводами, которые выполняются с использованием правил, представленных как нечеткие множества.

Определение

Нечеткое подмножество F множества элементов U определяется функцией принадлежности $\mu_F(u)$. Эта функция отображает элементы u множества U на множество чисел в интервале $[0,1]$, которые указывают степень принадлежности каждого элемента нечеткому подмножеству F.

Если множество U состоит из конечного числа элементов $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, то нечеткое подмножество F можно представить следующим образом:

$$F = \mu_F(u_1)/u_1 + \mu_F(u_2)/u_2 + ... + \mu_F(u_n)/u_n = \sum^{n} \mu_F(u_i)/u_i.$$

Следует иметь в виду, что знак плюс в этой формуле означает не суммирование, а объединение или конъюнкцию, а символ « / » показывает, что значение $\mu_A(u_i)$ относится к элементу, следующему за ним.

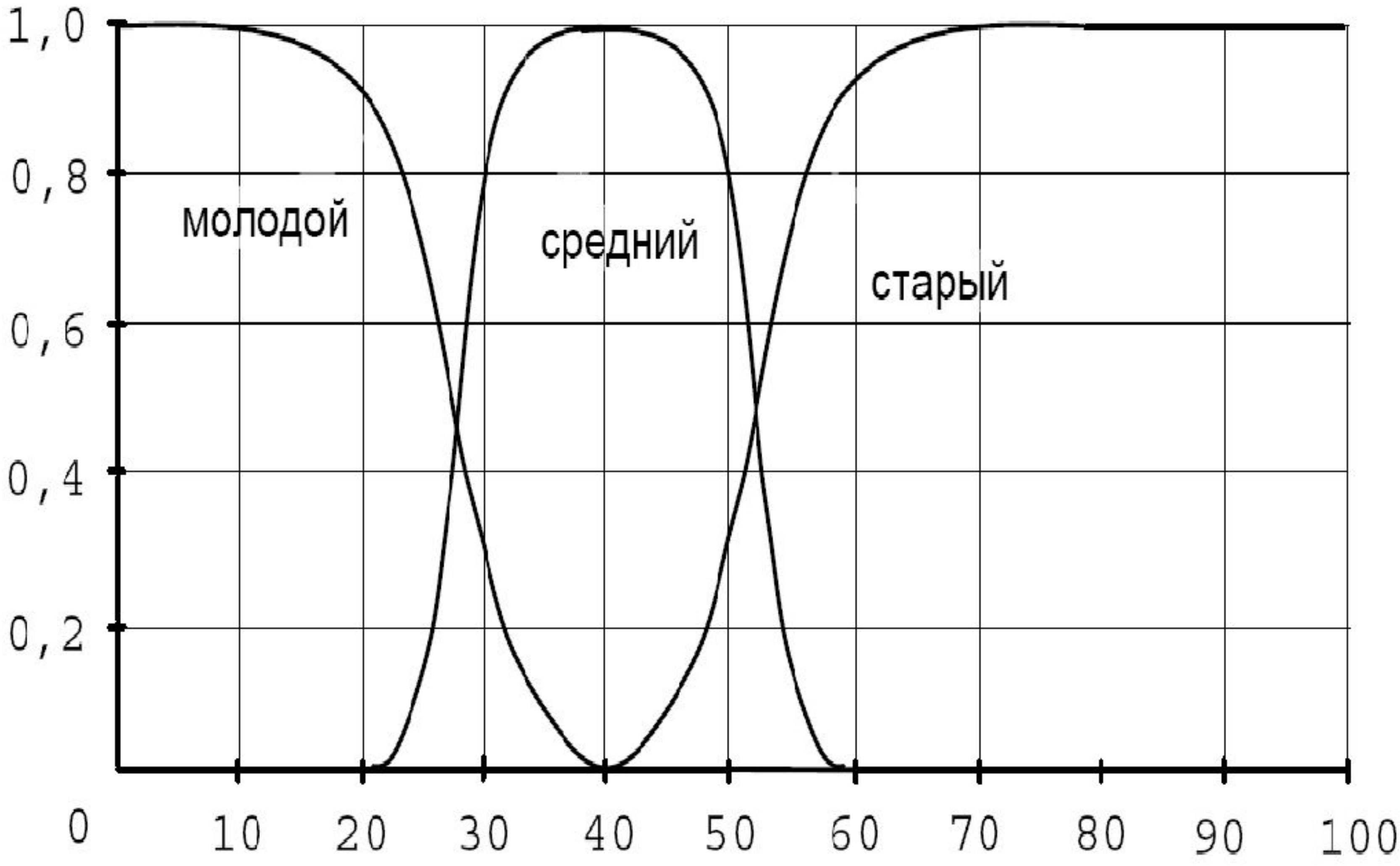
Пример

$U = 1 + 2 + 3 + ... + 10$. Тогда нечеткое множество A, которое описывается понятием «несколько», можно записать в следующем виде: «несколько» = 0,4/2 + 0,7/3 + 0,8/9, символ «=» означает здесь равенство по определению.

В случае непрерывного множества U вводится следующее обозначение подмножества F: $\int_U \mu(u)/u$.

Следует иметь в виду, что знак $\int$ в приведенной выше формуле означает не интегрирование, а объединение. Заметим также, что если $\mu_A(u)$ принимает значение только 0 или 1, то множество A является обычным множеством. Запись $\mu_A(u)=1$ означает, что элемент $u \in U$ принадлежит множеству A, т.е. $u \in A$. Запись $\mu_A(u)=0$ означает, что $u \in U$ не принадлежит множеству A, т.е. $u \notin U$.

Пусть U – множество людей в возрасте 0–100 лет, функции принадлежности нечетких множеств, означающих возраст: «Молодой», «Средний», «Старый» можно определить при помощи графика



При дискретизации через 10 лет получим приблизительно следующее:

молодой = 1/0 + 1/10 + 0,9/20 + 0,3/30,

средний = 0,8/30 + 1/40 + 0,8/50,

старый = 0,3/50 + 0,9/60 + 1/70 + 1/80 + 1/90+ 1/100.

Здесь элементы множества с функцией принадлежности, равной 0, не записываются.

Операции на нечетких множествах

Над нечеткими множествами выполняются те же операции, что и над обычными множествами.

Понятие нечеткого подмножества Л. Заде определил следующим образом: нечеткое подмножество данного конечного множества U – это такое подмножество, значения степеней принадлежности элементов которого лежат в единичном интервале [0,1]. Пусть $A = \int_U \mu A(u) / u$ и $B = \int_U \mu B(u) / u$ – два нечетких множества, тогда нечеткое множество A является *подмножеством* нечеткого множество $B (A \subseteq B)$, если для всех u справедливо неравенство $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$.

Равенство двух нечетких множеств определяется следующим образом: два нечетких множества A и B равны $(A = B)$, если для всех u справедливо $\mu_A(u) = \mu_B(u)$.

ОБЪЕДИНЕНИЕ нечетких множеств A и B:

$$A \cup B = \int_U \left(\mu A(u) \vee \mu B(u)\right) / u,$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ нечетких множеств A и B:

$$A \cup B = \int_U \left(\mu A(u) \wedge \mu B(u)\right) / u,$$

где $\left(\mu A(u) \wedge \mu B(u)\right) = \min \mu A(u), \mu B(u)$.

ДОПОЛНЕНИЕ или *ОТРИЦАНИЕ* определяется следующей формулой: $\sim A = \int_U \left(1 - \mu_A(u)\right) / u$.

Квантификатор **не** может интерпретироваться с помощью операции отрицания:

$$\textbf{не} \;\; x = \left(1 - \mu_x(u)\right) / u.$$

РАЗНОСТЬ двух нечетких множеств определяется формулой

$$A - B = A \cap \sim B.$$

ДИЗЪЮНКТИВНАЯ СУММА определяется соотношением

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Например,

~(*молодой*) = 0,1/20+0,7/30+1/40+1/50+1/60+1/70+1/80+1/90+1/100.

(*молодой*) $\cup$ (*средний*) = 1/0+1/10+0,9/20+0,8/30+1/40+0,8/50.

(*молодой*) $\cap$ (*средний*) = 0,3/30.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ нечетких множеств A и B определяется следующим соотношением: $A \cdot B = \int\limits_U (\mu_A(u) \cdot \mu_B(u)) / u.$

Операция *возведения в степень* $A^b = \int\limits_U (\mu_A(u))^b / u$, где $b > 0$.

Операция *концентрирования* нечеткого множества CON(A) = A^2. Эта операция уменьшает степень принадлежности элементов тем больше, чем меньше степень их принадлежности первоначальному множеству A. Квантификатор **очень** может интерпретироваться с помощью операции концентрации, то есть возведения в квадрат:

$$\textbf{очень}\ \ x = \int \mu_x^2(u) / u.$$

Операция *растяжения* нечеткого множества является противоположной концентрации и определяется соотношением $DIL(A) = A^{0,5}$.

Операция контрастной интенсивности определяется соотношением $INT(A) = \begin{cases} 2 \cdot A^2, \ 0 \le \mu_A(u) \le 0.5; \\ \sim \left(2 \cdot (\sim A)^2\right), \ 0.5 \le \mu_A(u) \le 1. \end{cases}$

Эта операция увеличивает значения $\mu_A(u)$, которые больше 0,5, и уменьшает те значения $\mu_A(u)$, которые меньше 0,5, уменьшая тем самым нечеткость A.

Нечеткие отношения

Пусть U и V – универсальные множества, на которых определены X и Y соответственно, тогда нечеткое отношение $R: X \to Y$ определяется как подмножество декартова произведения двух нечетких множеств $X \times Y \subseteq U \times V$, которое задается с помощью функции принадлежности двух переменных по формуле $R = \int_{X \times Y} \mu_R(u, v)/(u, v)$.

В общем случае n-арное отношение, или n-отношение, определяется следующим образом. Пусть R – результирующее множество декартова произведения n множеств и μ – его функция принадлежности. Нечеткое n-отношение определяется как нечеткое подмножество R, принимающее какое-либо значение на интервале функции принадлежности в соответствии со следующей формулой:

$$R = \int_{X_1 \times \ldots \times X_n} \mu_R(u_1, \ldots, u_n)/(u_1, \ldots, u_n).$$

$$x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Пример

Допустим, что X = {Иван, Марья}; Y = {Петр, Дарья}, тогда

Дружба = 0.6/(Иван, Петр) + 0.9/(Иван, Дарья) +
+ 0.8/(Марья, Петр) + 0.1/(Марья, Дарья).

Отношения удобно записывать с помощью матрицы отношений

$$\begin{array}{c|cc|} & \text{Петр} & \text{Дарья} \\ \text{Иван} & 0.6 & 0.9 \\ \text{Марья} & 0.8 & 0.1 \end{array}$$

Допустим, что существует нечеткое знание-правило типа

если F, то G

(если старый, то умный), использующее нечеткие множества $F \subset U$ и $G \subset V$. Тогда один из способов построения нечеткого отношения из соответствующей области полного множества U в область полного множества V состоит в следующем:

$$R = F \times G = \int_{U \times V} \left(\mu_F(u) \wedge \mu_G(v)\right)/(u,v)$$

или

$$R = F \times G = \sum_i \sum_j \left(\mu_F(u_i) \wedge \mu_G(v_j)\right)/(u_i, v_j).$$

Необходимо отметить, что есть и другие способы построения нечеткого отношения.

Пусть U и V – это области натуральных чисел от 1 до 4, тогда определим следующим образом нечеткие множества:

$$F = \text{маленькие} = 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0/4,$$

$$G = \text{большие} \quad = 0/1 + 0.1/2 + 0.6/3 + 1/4.$$

Если есть нечеткое знание-правило

если u – маленькое, то v – большое,

то можно следующим образом построить нечеткое отношение, определяющее данное знание-правило:

$$R = F \times G = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Пусть R – нечеткое отношение из области U в область V, S – нечеткое отношение из области V в область W, тогда нечеткое отношение из области U в область W определяется как свертка max-min:

$$R \bullet S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} \bigcup_{v_j \in V} \left(\mu_R(u_i, v_j) \wedge \mu_S(v_j, w_k) \right) / (u_i, w_k).$$

Здесь знак « $\bullet$ » обозначает свертку max-min,

$\bigcup_{v_j}$ – взятие максимума для всех v_j;

$\wedge$ – взятие минимума.

Пример

$U = V = W = \{1, 2, 3, 4\}$.

$F =$ маленькие $= \quad 1/1 + 0.6/2 + 0.3/3 + 0/4$,

$G =$ большие $= \quad 0/1 + 0.1/2 + 0.6/3 + 1/4$.

$\sim F =$ не_маленькие $= 0/1 + 0.4/2 + 0.7/3 + 1/4$,

$G^2 =$ очень_большие $= 0/1 + 0.01/2 + 0.36/3 + 1/4$ или, округлив, $0/1 + 0/2 + 0.4/3 + 1/4$. Тогда если есть знание-правило

если *v* – не маленькое, то *w* – очень большое,

то в соответствии с формулой $S = \sim F \times G^2$ можно построить нечеткое отношение S из V в W

$$S = \sim F \times G^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{vmatrix}$$

И далее можно построить нечеткое отношение из U в W.

$$R \bullet S = \begin{vmatrix} 0 & 0.1 & 0.6 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0.4 & 1 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вывод на нечетких знаниях

Традиционный дедуктивный вывод, называемый также *модус поненс*, записывается следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

Что означает вывод Q из факта P по правилу $P \Rightarrow Q$.

Используя те же обозначения, можно определить нечеткий дедуктивный вывод следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P' \end{array}}{Q'}$$

Однако эта формулировка имеет существенное отличие от традиционного *модус поненс*. Здесь не требуется совпадения высказывания P' в факте и высказывания P в правиле. В общем случае могут не совпадать и заключения Q и Q'.

Л. Заде предложил нечеткий условный вывод в следующей форме:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{если } x \text{ есть } A, \text{ то } y \text{ есть } B, \text{ иначе } y \text{ есть } C\\ x \text{ есть } A'\end{array}}{y \text{ есть } D}$$

Здесь x, y – имена объектов; A, A', B, C, D – нечеткие понятия, представленные нечеткими множествами, определенными на U, U, V, V, V соответственно.

Предложено несколько правил, переводящих нечеткое условное высказывание «если *x* есть *A*, то *y* есть *B*, иначе *y* есть *C*» в нечеткое отношение $U \bullet V$.

Пусть A, B, C – нечеткие множества в U, V, V, заданные в виде

$$A = \int_U \mu A(u) / u; \;\; B = \int_V \mu B(v) / v; \;\; C = \int_V \mu C(v) / v.$$

Тогда имеем:

А. Максиминное правило Rm':

$$Rm' = (A \times B) \cup (\sim A \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} \left(\mu A(u) \wedge \mu B(v)\right) \vee \left(1 - \mu A(u)\right) \wedge \mu C(v) /(u, v).$$

Б. Арифметическое правило Ra':

$$Ra' = (\sim A \times V + U \times B) \cap (A \times V + U \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge \left(1 - \mu A(u) + \mu B(v)\right) \wedge \left((\mu A(u) + \mu C(v)\right) / (u, v).$$

В. Размытое бинарное правило

$$Rb' = (\sim A \times V \cup U \times B) \cap (A \times V \cup U \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} 1 \wedge \left(1 - \mu A(u) \vee \mu B(v)\right) \wedge \left((\mu A(u) \vee \mu C(v)\right) / (u, v).$$

Г. Правила Танака-Мидзумото [4, 10]

$$Rgg' = (\sim A \times V \Rightarrow U \times B) \cap (A \times V \Rightarrow U \times C) =$$

$$= \int\limits_{U \times V} 1 \wedge \big(\mu A(u) \to \mu B(v)\big) \wedge \big((1 - \mu A(u) \to \mu A(v)\big) / (u, v),$$

где $\mu A(u) \to \mu A(v) = \begin{cases} 1, \text{если } \mu A \le \mu B; \\ \mu B, \text{если } \mu A \ge \mu B. \end{cases}$

Таким образом, возвращаясь к исходной постановке задачи:

если x есть A, то y есть B, иначе y есть C

x есть A'

---

y есть D,

следствие D можно вывести следующим образом:

$$Dm = A' \bullet Rm',$$

$$Da = A' \bullet Ra',$$

$$Db = A' \bullet Rb',$$

$$Dgg = A' \bullet Rgg'.$$

Пусть имеются следующие посылки:

x – ***не очень маленькое;***

если x – ***маленькое***, *то* y – ***большое***, *иначе* y – ***маленькое.***

Найти значения y'. Множество $U = 1 + 2 + 3$.

маленькое $= {}^{1}/_{1} + {}^{0.4}/_{2}$; ***большое*** $= {}^{0.5}/_{2} + {}^{1}/_{3}$.

Тогда термин ***очень маленькое*** = ${}^{1}/_{1} + {}^{0.16}/_{2}$, а ***не очень маленькое*** = ${}^{0.84}/_{2} + {}^{1}/_{3}$.

Отношение для максиминного правила:

$$Rm' = (A \times B) \cup (\sim A \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} \left(\mu A(u) \wedge \mu B(v)\right) \vee \left(1 - \mu A(u)\right) \wedge \mu C(v) / (u, v).$$

Здесь A = ***маленькое***, B = ***большое***, C = ***маленькое***.

Пример вычисления значений элементов матрицы Rm' приведен ниже:

$(u_1, v_1) = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0;$ $(u_2, v_1) = (0.4 \wedge 0) \vee (0.6 \wedge 1) = 0.6;$

$(u_1, v_2) = (1 \wedge 0.5) \vee (0 \wedge 0.4) = 0.5;$ $(u_2, v_2) = (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.4) = 0.4;$

$(u_1, v_3) = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1;$ $(u_2, v_3) = (0.4 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0) = 0.4;$

$(u_3, v_1) = (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) = 1;$

$(u_3, v_2) = (0 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.4) = 0.4;$

$(u_3, v_3) = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0.$

$$Rm' = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда значение y' может быть определено следующим образом

$$y' = \textbf{\textit{не очень маленькое}} \bullet Rm' = \begin{vmatrix} 0 & 0.84 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \end{vmatrix},$$

т.е. $y' = {}^{1}/_{1} + {}^{0.4}/_{2} + {}^{0.4}/_{3}$, что может быть интерпретировано (с некоторой натяжкой) как ***довольно-таки маленькое***.

Далее рассмотрим для указанных выше посылок арифметическое правило Ra':

$$Ra' = (\sim A \times V + U \times B) \cap (A \times V + U \times C) =$$

$$\int_{U\times V} 1 \wedge \left(1 - \mu A(u) + \mu B(v)\right) \wedge \left((\mu A(u) + \mu C(v)\right) / (u,v) = \begin{vmatrix} 0 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}4 \\ 1 & 0{,}4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда значение *y'*, используя арифметическое правило, может быть определено следующим образом:

$$y' = \textbf{\textit{не очень маленькое}} \bullet Ra' = \begin{vmatrix} 0 & 0.84 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{vmatrix},$$

т.е. $y' = {}^{1}/_{1} + {}^{0.8}/_{2} + {}^{0.4}/_{3}$.

Вывод с использованием размытого бинарного правила

$$Rb' = (\sim A\times V \cup U\times B)\cap(A\times V\cup U\times C) =$$

$$= \int_{U\times V} 1\wedge\big(1-\mu A(u)\vee\mu B(v)\big)\wedge\big((\mu A(u)\vee\mu C(v)\big)/(u,v) = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда значение y', может быть определено следующим образом:

$$y' = \textit{\textbf{не очень маленькое}} \bullet Rb' = \begin{vmatrix} 0 & 0.84 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \end{vmatrix},$$

т.е. $y' = {}^{1}/_{1} + {}^{0.4}/_{2} + {}^{0.4}/_{3}$, что может быть также интерпретировано как ***довольно-таки маленькое***.

Последний нечеткий вывод проведем с использованием правила Танака-Мидзумото

$$Rgg' = (A \times V \Rightarrow U \times B) \cap (\sim A \times V \Rightarrow U \times C) =$$

$$= \int_{U \times V} (\mu_A(u) \to \mu_B(v)) \wedge ((1 - \mu_A(u)) \to \mu_C(v)) / (u, v),$$

где $\mu_A(u) \to \mu_B(v) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mu_A \le \mu_B; \\ \mu_B, \text{ если } \mu_A > \mu_B; \end{cases}$

$$Rgg' = \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y' = \textbf{\textit{не очень маленькое}} \bullet Rgg' = \begin{vmatrix} 0 & 0.84 & 1 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0.4 & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. $y' = {}^{1}/_{1} + {}^{0.4}/_{2} + {}^{0}/_{3}$, что интерпретируется как ***маленькое***.

Рассмотренные примеры показывают, что использование отношений Rm', Ra', Rb' для нечеткого вывода не дают следствий, которые совпадали бы с нашими интуитивными представлениями. Лучшие результаты дает отношение Rgg'.

В классической логике известно и еще одно правило вывода, носящее имя *модус толленс*. Записывается оно следующим образом:

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \sim Q \end{array}}{\sim P}$$

В нечетком выводе на основе правила *модус толленс* импликация должна удовлетворять закону контрапозиции, т.е. $P \rightarrow Q = \sim Q \rightarrow \sim P$. Это необходимо для обеспечения эквивалентности правил «если ***x*** есть *A*, то *y* есть *B*» и «если ***y*** есть не ***B***, то ***x*** есть не ***A***».

Напомним определение прямого произведения двух множеств.

Пусть $U_1 = \{x\}$ и $U_2 = \{y\}$ - обычные множества. Прямое произведение $U_1 \times U_2$ множеств U_1 и U_2 есть множество упорядоченных пар вида (x, y), то есть

$$U_1 \times U_2 = \{(x,y): \quad x \in U_1,\ y \in U_2\}.$$

Пусть $\mathcal{M}$ - множество принадлежностей. Тогда нечеткое множество $\mathcal{R}$ такое, что

$$\forall (x,y) \in U_1 \times U_2 \quad \mu_{\mathcal{R}}(x,y) \in \mathcal{M}$$

называется нечетким бинарным отношением $\mathcal{R}$ в $U_1 \times U_2$.

Можно привести следующий пример нечеткого бинарного отношения.

Пример 5 *Пусть* $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $U_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $\mathcal{M} = [0, 1]$. *Тогда нечет-*
кое бинарное ... *блицей:*

$\mathcal{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0.3	0.5	0.9	0.3
x_2	0.7	0.2	1	0	0.1
x_3	0.9	0	1	0.7	0.4

Естественным обобщением нечеткого бинарного отношения является нечеткое $n-$ арное отношение. Оно определяется следующим образом. Пусть $P_n = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ - прямое произведение n множеств, $\mathcal{M}$ - множество принадлежностей. **Нечетким n - арным отношением** называется нечеткое множество в P_n, принимающее свои значения в $\mathcal{M}$.

Для нечетких отношений вводятся понятия проекций следующим образом. **Первая проекция** нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(1)}(x) = \max_{y} \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Вторая проекция нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}}^{(2)}(y) = \max_{x} \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Глобальной проекцией $h(\mathcal{R})$ нечеткого бинарного отношения $\mathcal{R}$ называется вторая проекция первой проекции (или наоборот):

$$h(\mathcal{R}) = \max_{x} \max_{y} \mu_{\mathcal{R}}(x, y) = \max_{y} \max_{x} \mu_{\mathcal{R}}(x, y).$$

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{L}$ **содержит** нечеткое отношение $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ **содержится** в $\mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \leq \mu_{\mathcal{L}}(x, y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\overline{\mathcal{R}}$ является **дополнением** нечеткого отношения $\mathcal{R}$, если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\overline{\mathcal{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\mathcal{R}}(x, y)$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является **объединением** нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \cup \mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x, y) = \max\left[\mu_{\mathcal{R}}(x, y),\ \mu_{\mathcal{L}}(x, y)\right]$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является **пересечением** нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x, y) = \min\left[\mu_{\mathcal{R}}(x, y),\ \mu_{\mathcal{L}}(x, y)\right]$.

Говорят, что нечеткое отношение $\mathcal{G}$ является **алгебраическим произведением** нечетких отношений $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ ($\mathcal{G} = \mathcal{R} \bullet \mathcal{L}$), если для всех пар (x, y) из $U_1 \times U_2$ выполнено $\mu_{\mathcal{G}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \cdot \mu_{\mathcal{L}}(x, y)$.

Операция композиции нечетких отношений $\mathcal{R}_1$ в $X \times Y$ и $\mathcal{R}_2$ в $Y \times Z$ позволяет определить нечеткое отношение в $X \times Z$.

(Max-min) - композиция и ее свойства

Пусть $\mathcal{R}_1$ есть нечеткое отношение в $X \times Y$, $\mathcal{R}_2$ - нечеткое отношение в $Y \times Z$. (Max-min) - композиция $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ определяется выражением

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2}(x, z) = \max_y [\min\{\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y), \mu_{\mathcal{R}_2}(y, z)\}], \tag{2.1}$$

где $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$.

Вычисление композиции нечетких отношений аналогично вычислению произведения матриц, ("столбец на строку"), только вместо произведения и суммы выполняются операции взятия минимума и максимума соответственно.

Пример 7 *Пусть* $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. *Отношение* $\mathcal{R}_1$ *на* $X \times Y$ *задано следующей матрицей:*

$\mathcal{R}_1$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0.1	0.2	0.5	0.7	0.3
x_2	0.3	0	1	0.3	0.7
x_3	0.1	0.8	0	0	1

Нечеткое отношение $\mathcal{R}_2$ *на* $Y \times Z$ *задано следующей матрицей:*

$\mathcal{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0.9	0	0.4	0.7
y_2	0.3	0.4	0.9	1
y_3	1	0.4	0.2	0
y_4	0.3	0.4	0.7	0.2
y_3	0.5	0.5	0.9	0.1

Тогда нечеткое отнишение $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$ определено на $X \times Z$ и имеет выражает следующей матрицей:

$\mathcal{R}_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	*0.5*	*0.4*	*0.7*	*0.2*
x_2	*1*	*0.5*	*0.7*	*0.8*
x_3	*0.5*	*0.5*	*0.9*	*0.8*

Среди свойств (max-min) - композиции можно выделить следующие.
– ассоциативность: $(\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1)$;
– дистрибутивность относительно объединения:

$$\mathcal{R}_1 \circ (\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \cup (\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_3);$$

– не дистрибутивность относительно пересечения:

$$\mathcal{R}_3 \circ (\mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_1) \neq (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2) \cap (\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_1);$$

– монотонность:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{A} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{B}.$$

(Max-$\star$) - композиции

Понятие (Max-min) - композиции можно обобщить следующим образом: заменить в (2.1) операцию min на любую другую, для которой выполняются свойство ассоциативности и монотонного неубывания по каждому аргументу:

Пусть операция "$\star$" является ассоциативной и монотонно не убывает по каждому аргументу. (Max-$\star$) - композиция определяется следующей функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2}(x, z) = \max_y \left[\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) \star \mu_{\mathcal{R}_2}(y, z) \right], \tag{2.2}$$

где $x \in X, \ y \in Y, \ z \in Z$.

Важным частным случаем (Max-$\star$) - композиции является (Max-$\cdot$) - композиция. В этом случае операция "$\star$" - это произведение, и, таким образом, (2.2) принимает следующий вид:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2}(x, z) = \max_y \left[\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) \cdot \mu_{\mathcal{R}_2}(y, z) \right],$$

где $x \in X, \ y \in Y, \ z \in Z$.

Другим примером (Max-$\star$) - композиции в случае, когда множество принадлежностей $\mathcal{M} = [0, 1]$, является композиция, получаемая из (2.1) заменой операции min на среднее арифметическое:

$$\mu_{\mathcal{R}_1 \cdot \mathcal{R}_2}(x, z) = \max_y \left[\frac{1}{2} \left(\mu_{\mathcal{R}_1}(x, y) + \mu_{\mathcal{R}_2}(y, z) \right) \right],$$

Выбор того или иного варианта (max-$\star$) - композиции в приложениях определяется свойствами задачи.