

# Теория Автоматического Управления Часть 5

Полулях Антон Иванович, к.т.  
н., доцент кафедры АД, зам.  
начальника отдела  
проектирования систем  
автоматического управления

# 6. Анализ систем управления

## • *6.5. Критерии устойчивости*

- Итак, для исследования устойчивости линейной системы достаточно найти корни ее характеристического полинома.
- Если все корни имеют отрицательные вещественные части (находятся в левой полуплоскости, слева от мнимой оси), такой полином называется *устойчивым*, потому что соответствующая линейная система устойчива.
- Полиномы, имеющие хотя бы один корень с положительной вещественной частью (в правой полуплоскости) называются *неустойчивыми*.

## 6. Анализ систем управления

- На ранней стадии развития теории управления актуальной была задача определения устойчивости полинома без вычисления его корней.
- Конечно, сейчас легко найти корни характеристического полинома с помощью компьютерных программ, однако такой подход дает нам только количественные (а не качественные) результаты и не позволяет исследовать устойчивость теоретически, например, определять границы областей устойчивости.

# 6. Анализ систем управления

## 6.5.1. Критерий Гурвица

- Существует несколько алгоритмов, позволяющих проверить устойчивость полинома

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n,$$

- не вычисляя его корни. Прежде всего, для устойчивости все коэффициенты  $a_i$  ( $i = 0, \dots, n$ )
- должны быть одного знака, обычно считают, что они положительные. Это *необходимое условие устойчивости полинома*. Однако при  $n > 2$  это условие недостаточно, если полином имеет комплексно-сопряженные корни.
- Поэтому были разработаны *необходимые и достаточные условия* (критерии) устойчивости полиномов.

## 6. Анализ систем управления

- Один из самых известных критериев – **критерий Гурвица** – использует матрицу  $H_n$  размером  $n \times n$ , составленную из коэффициентов полинома  $\Delta(s)$  следующим образом:
  - первая строка содержит коэффициенты  $a_1, a_3, a_5, \dots$  (все с нечетными номерами), оставшиеся элементы заполняются нулями;
  - вторая строка содержит коэффициенты  $a_0, a_2, a_4, \dots$  (все с четными номерами);
  - третья и четвертая строка получаются сдвигом первой и второй строк на 1 позицию вправо, и т.д.

## 6. Анализ систем управления

- Например, для полинома пятого порядка ( $n = 5$ ) эта матрица имеет вид

$$H_5 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} \quad (a_0 > 0)$$

- **Критерий Гурвица.** Все корни полинома  $\Delta(s)$  имеют отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда все  $n$  главных миноров матрицы  $H_n$  (определителей Гурвица) положительны.

## 6. Анализ систем управления

- Вспомним, что для устойчивости полинома *необходимо*, чтобы все его коэффициенты были положительными. Поэтому достаточно проверить только  $n - 1$  первых определителей Гурвица. Например, для  $n = 5$  речь идет об определителях

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0$$

- Раскрывая определитель матрицы  $H_5$  по последнему столбцу, получаем  $D_5 = \det H_5 = a_5 D_4$
- Так как  $a_5 > 0$ , из условия  $D_4 > 0$  сразу следует  $D_5 > 0$

## 6. Анализ систем управления

- Таким образом, условия устойчивости сводятся к нескольким неравенствам. Это очень удобно для систем низкого порядка. Например, для  $n = 2$  необходимое и достаточное условие устойчивости – положительность всех коэффициентов полинома. Для  $n = 3$  характеристический полином имеет вид

$$\Delta(s) = a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3$$

- , поэтому условия Гурвица определяются матрицей

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (a_0 > 0).$$

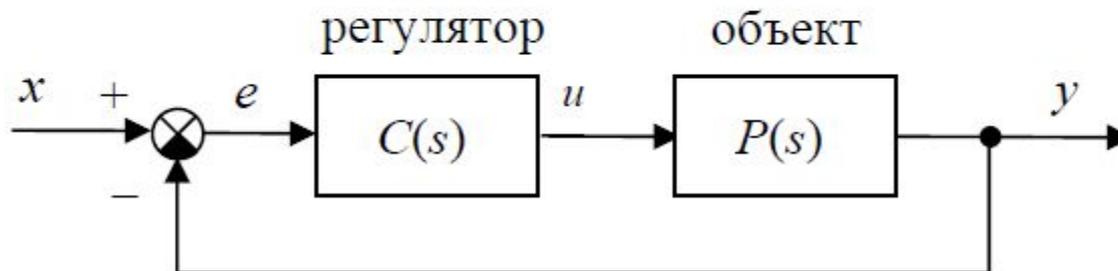
- Полином устойчив, если все коэффициенты положительны и

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 > 0. \quad (49)$$

## 6. Анализ систем управления

- Рассмотрим систему, в которой объект и регулятор задаются передаточными функциями:

$$P(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad C(s) = \frac{K}{s}.$$



- С помощью критерия Гурвица можно определить, при каких значениях  $K$  замкнутая система (с отрицательной обратной связью) устойчива. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{K}{\Delta(s)},$$

## 6. Анализ систем управления

- где характеристический полином имеет вид

$$\Delta(s) = (T_1s + 1)(T_2s + 1)s + K = T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K.$$

- Необходимое условие устойчивости дает  $K > 0$ . Применяя критерий Гурвица для системы третьего порядка (49), получаем

$$T_1 + T_2 > KT_1T_2 \Rightarrow K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

- Таким образом, система устойчива при  $0 < K < \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$

## 6. Анализ систем управления

- Теперь предположим, что модель системы задана в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t)$$

- Как проверить ее устойчивость? Используя результаты раздела 3.7, построим передаточную функцию

$$W(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

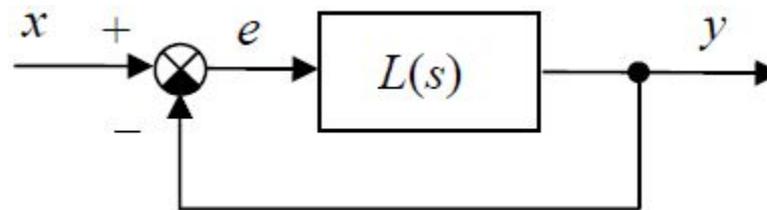
- Характеристический полином этой системы (знаменатель  $W(s)$ ), определяется формулой

$$\Delta(s) = \det(sI - A)$$

- где  $\det$  обозначает определитель квадратной матрицы. Чтобы определить, устойчива ли система, нужно применить к этому полиному критерий Гурвица.

# 6. Анализ систем управления

- 6.5.2. Критерий Найквиста
- Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость замкнутой системы, построив частотную характеристику разомкнутой системы. Пусть  $L(s)$  – передаточная функция разомкнутой системы, а  $L(j\omega)$  – ее частотная характеристика.



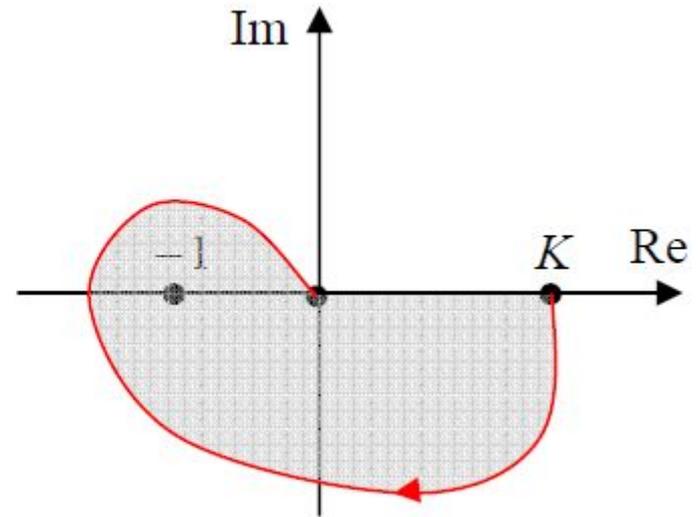
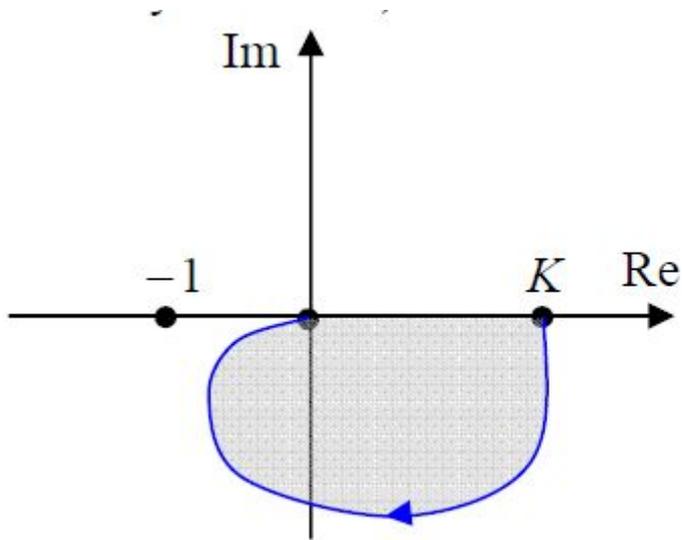
- Для простоты сначала будем считать, что разомкнутая система устойчива и не содержит интегрирующих звеньев,
- то есть  $L(0) = K \neq \infty$ , где  $K$  – некоторое число.

## 6. Анализ систем управления

- Для каждой частоты  $\omega$  значение  $L(j\omega)$  – это комплексное число, которое можно изобразить точкой на комплексной плоскости.
- При изменении частоты от 0 до  $\infty$  из этих точек складывается *годограф Найквиста* – некоторая кривая, которая начинается в точке  $(K; 0)$  на вещественной оси и заканчивается в начале координат (если  $L(s)$  – строго правильная функция, то есть степень ее числителя меньше степени знаменателя).
- Можно доказать, что система устойчива тогда и только тогда, когда годограф  $L(j\omega)$  не охватывает точку  $(-1; 0)$ .

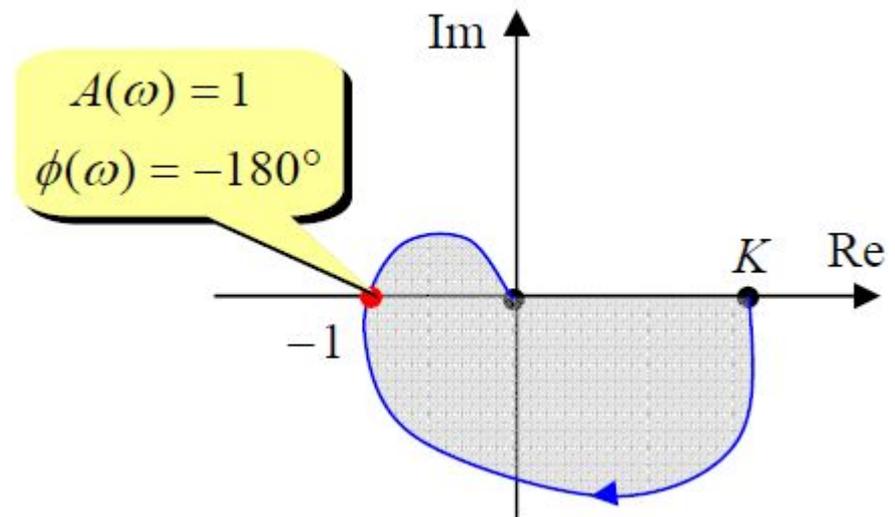
## 6. Анализ систем управления

- На рисунке слева годограф не охватывает эту точку (и замкнутая система устойчива), а на рисунке справа – охватывает (система неустойчива).



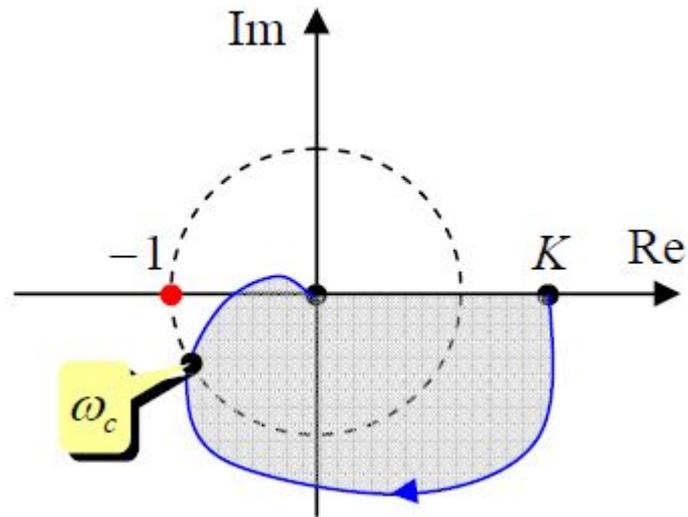
## 6. Анализ систем управления

- Выражение «система находится на границе устойчивости» означает, что частотная характеристика проходит через точку  $(-1; 0)$ . В этом случае для некоторой частоты  $\omega$  мы имеем
- $A(\omega) = 1$  и  $\phi(\omega) = -180^\circ$ . Это говорит о том, что после прохождения контура величина сигнала меняет знак, сохраняя абсолютную величину (энергию), то есть устанавливаются незатухающие колебания.



## 6. Анализ систем управления

- Частота  $\omega_c$ , для которой  $A(\omega_c) = 1$ , называется **частотой среза**. Для устойчивой системы значение фазы на частоте среза должно быть больше, чем  $-180^\circ$ ; в этом случае годограф не охватит точку  $(-1; 0)$ .

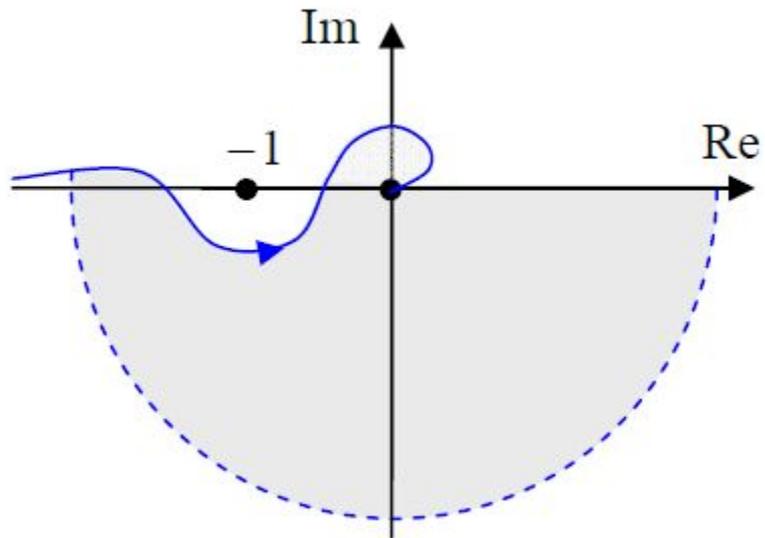
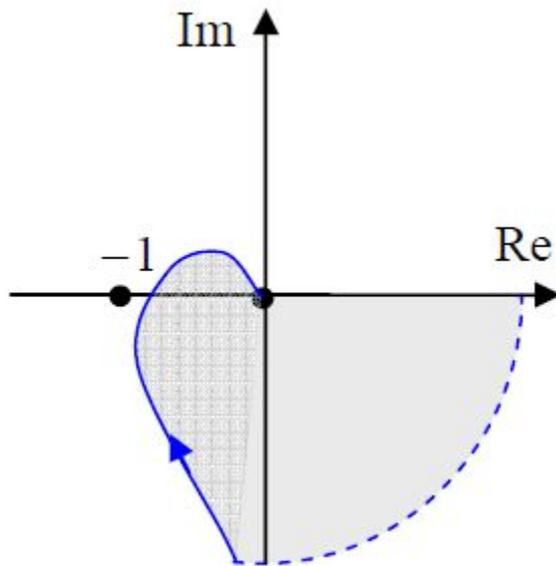


## 6. Анализ систем управления

- Если передаточная функция  $L(s)$  имеет полюса в точке  $s = 0$  (то есть обращается в бесконечность в этой точке), ситуация усложняется. Теперь годограф начинается не на вещественной оси, а приходит из бесконечности.
- Тогда в контур необходимо включить не только полученную кривую, но и часть окружности бесконечного радиуса от вещественной оси до годографа в порядке обхода по часовой стрелке.
- Если функция  $L(s)$  имеет  $k$  полюсов в точке  $s = 0$ , нужно добавить  $k$  секторов по  $90^\circ$ . На рисунках показаны годографы Найквиста устойчивых систем, в которых функция  $L(s)$  имеет соответственно 1 и 2 полюса в точке  $s = 0$ . Эти годографы не охватывают точку  $(-1; 0)$ .

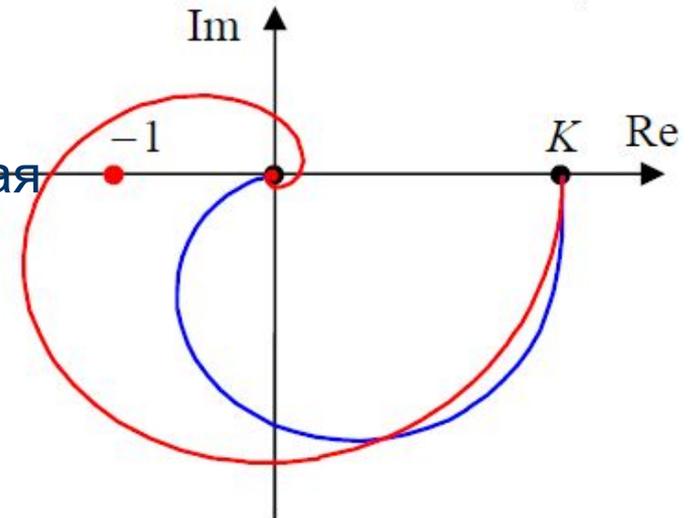
## 6. Анализ систем управления

- На рисунках показаны годографы Найквиста устойчивых систем, в которых функция  $L(s)$  имеет соответственно 1 и 2 полюса в точке  $s = 0$ . Эти годографы не охватывают точку  $(-1; 0)$ .



## 6. Анализ систем управления

- Если в системе есть запаздывание на время  $\tau$ , на любой частоте появляется дополнительный сдвиг фазы на  $-\tau\omega$  (без изменения амплитуды). Это значит, что каждая точка годографа поворачивается на некоторый угол против часовой стрелки.
- На рисунке синяя линия – частотная характеристика системы без запаздывания, а красная – аналогичная характеристика для системы с запаздыванием. Видно, что запаздывание привело к неустойчивости системы (годограф охватил критическую точку  $(-1; 0)$ ).
- Таким образом, система может потерять устойчивость из-за «медленного» датчика. Можно говорить о том, что *запаздывание всегда ухудшает устойчивость системы*, и этот факт важен.

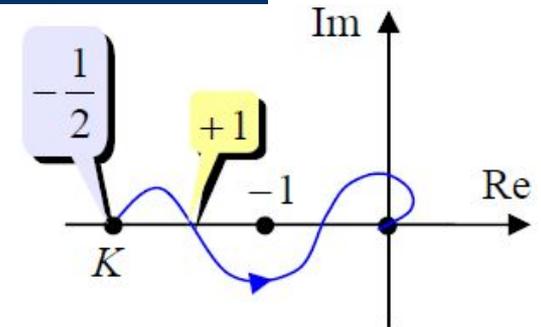
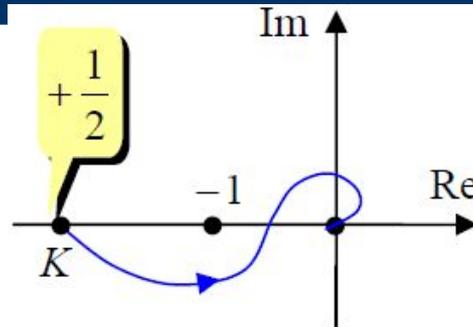


## 6. Анализ систем управления

- Если  $L(s)$  имеет полюса с положительной вещественной частью (разомкнутая система неустойчива), нужно считать, сколько раз годограф пересекает ось абсцисс левее точки  $(-1; 0)$ .
- Причем переходы «сверху вниз» считаются положительными, а переходы «снизу вверх» - отрицательными.
- Для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы разница между числом положительных и отрицательных переходов была равна  $l / 2$ , где  $l$  – число неустойчивых полюсов функции  $L(s)$ .
- Начальная точка на оси абсцисс левее точки  $(-1; 0)$  считается за половину перехода.

## 6. Анализ систем управления

- Годограф для  $l = 1$ .



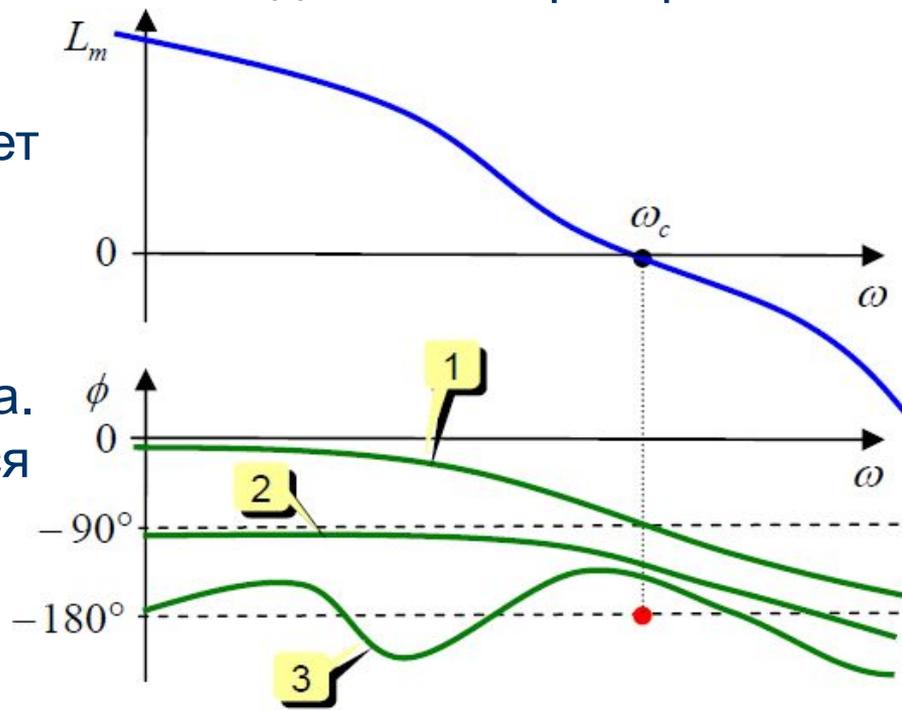
- Частотная характеристика начинается на вещественной оси левее точки  $(-1; 0)$ . На рисунке слева годограф сначала идет вниз (половина положительного перехода) и больше нигде не пересекает ось абсцисс левее точки  $(-1; 0)$ , поэтому разница переходов равна  $1/2 = l/2$  и замкнутая система устойчива.
- На правом рисунке частотная характеристика сначала идет вверх (считаем это за половину отрицательного перехода), а затем переходит в нижнюю полуплоскость (положительный переход). Разница снова равна  $1/2 = l/2$  и система устойчива.

# 6. Анализ систем управления

- *6.5.3. Критерий Найквиста для ЛАФЧХ*
- Критерий Найквиста часто используется для логарифмических частотных характеристик.
- Сначала предположим, что передаточная функция разомкнутой системы не имеет неустойчивых полюсов. Как мы уже знаем, для анализа устойчивости наиболее важно поведение частотной характеристики в районе
- *частоты среза  $\omega_c$ , где  $A(\omega_c) = 1$  и  $L_m(\omega_c) = 20 \lg A(\omega_c) = 0$ .*
- Для устойчивой системы значение фазы на частоте среза должно быть больше, чем  $-180^\circ$ .

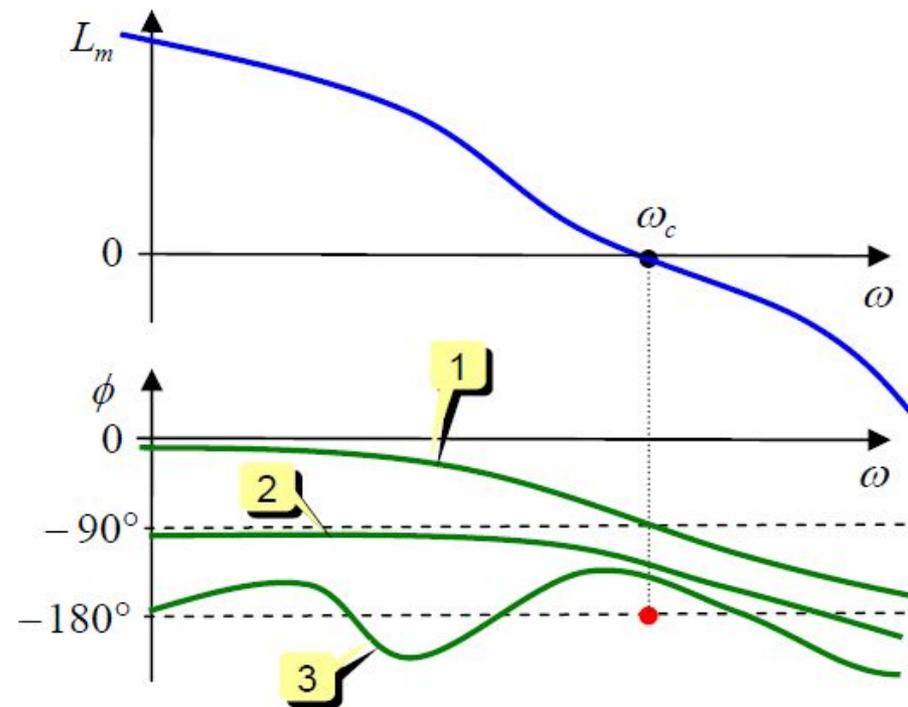
## 6. Анализ систем управления

- На графике представлены три фазовых характеристики устойчивых систем. Кривая 1 соответствует случаю, когда в разомкнутой системе нет интеграторов (и фазовая характеристика начинается с нуля), кривая 2 – системе с одним интегратором, а кривая 3 – с двумя.
- Если разомкнутая система имеет неустойчивые звенья, нужно считать переходы фазовой характеристики через линию  $\varphi(\omega) = -180^\circ$  левее частоты среза. Здесь положительным считается переход снизу вверх, а отрицательным – сверху вниз.



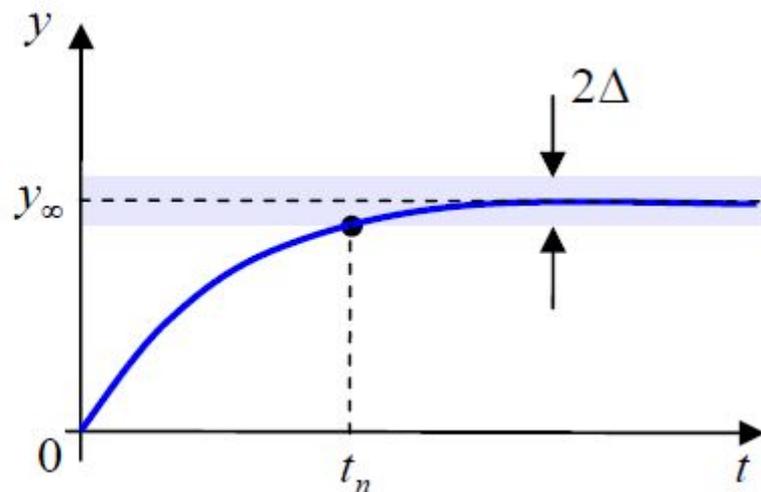
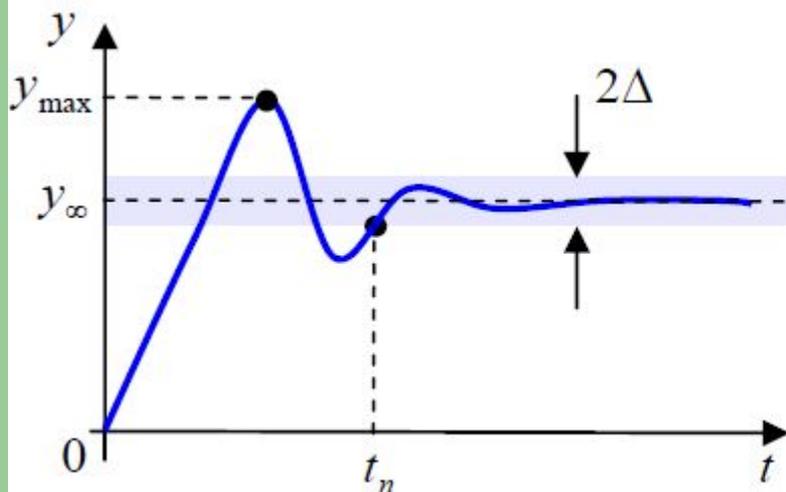
## 6. Анализ систем управления

- Если фазовая характеристика начинается на линии  $\phi(\omega) = -180^\circ$  (на нулевой частоте), это считается за половину перехода. Для устойчивой системы разность между числом положительных и отрицательных переходов должна быть равна  $1/2$ , где  $1$  – число неустойчивых полюсов передаточной функции  $L(s)$ .



# 6. Анализ систем управления

- **6.6. Переходный процесс**
- Хорошо спроектированная система должна не только быть устойчивой и поддерживать заданную точность в установившемся режиме, но и плавно переходить на новый режим при изменении заданного значения выхода (*уставки*). Качество переходных процессов обычно оценивается по переходной характеристике (реакции системы на единичный ступенчатый входной сигнал).



## 6. Анализ систем управления

- В первую очередь нас интересует, насколько быстро заканчивается переход на другой режим (время переходного процесса  $t_n$ ). Оно определяется как время, через которое регулируемая величина «входит в коридор» шириной  $2\Delta$  вокруг установившегося значения  $y^\infty$ . Это значит, что при  $t > t_n$  значение выхода отличается от установившегося не более, чем на  $\Delta$ .
- Обычно величина  $\Delta$  задается в процентах от установившегося значения, чаще всего 2% или 5%.
- Заметим, что для апериодического звена с постоянной времени  $T$  время переходного процесса равно  $t_n = 3T$  (с точностью 5%).

## 6. Анализ систем управления

- Другая важная характеристика – **перерегулирование**  $\sigma$  – показывает, на сколько процентов максимальное значение выхода  $y_{\max}$  превышает установившееся значение  $y_{\infty}$  :

$$\sigma = \frac{y_{\max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} \cdot 100\%$$

- Иногда удастся обеспечить нулевое перерегулирование (*апериодический* переходный процесс, как у апериодического звена). Нужно помнить, что увеличение быстродействия обычно приводит к увеличению перерегулирования.
- Вы уже знаете, что устойчивость линейной системы определяется полюсами ее передаточной функции  $W(s)$  , однако на переходные процесс влияют и *нули*, причем в некоторых случаях очень существенно.

## 6. Анализ систем управления

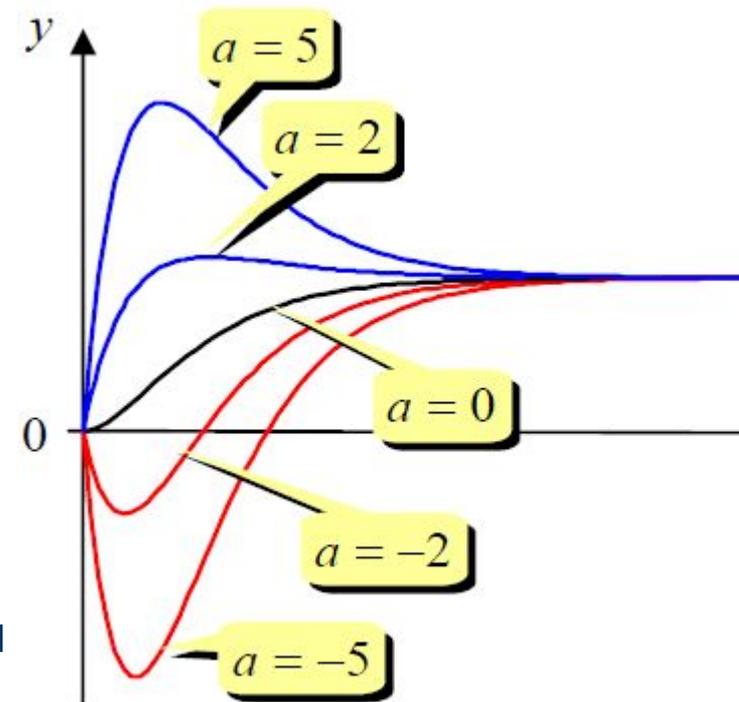
- Для примера рассмотрим передаточную функцию

$$W(s) = \frac{as + 1}{(s + 1)^2} = \frac{a(s + 1/a)}{(s + 1)^2},$$

- где  $a$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Такая передаточная функция имеет нуль в точке  $s = -1/a$ . Нули, находящиеся в левой полуплоскости (при  $a > 0$ ) часто называют *устойчивыми* (по аналогии с полюсами), а нули в правой полуплоскости (при  $a < 0$ ) – *неустойчивыми*. Очевидно, что при  $a = 0$  мы получаем апериодическое звено второго порядка. Теперь построим переходные характеристики этого звена при разных значениях  $a$ .
- Заметим, что при любом  $a$  установившееся значение выхода равно  $W(0) = 1$ .

## 6. Анализ систем управления

- По графикам видно, что при нулевом значении  $a$  переходный процесс – апериодический.
- При  $a > 0$  (устойчивый нуль) наблюдается перерегулирование, причем оно тем больше, чем больше модуль  $a$ .
- При отрицательных значениях  $a$  в переходном процессе есть *недорегулирование*. Это значит, что в первый момент времени регулируемая переменная начинает изменяться в сторону, противоположную заданному значению.

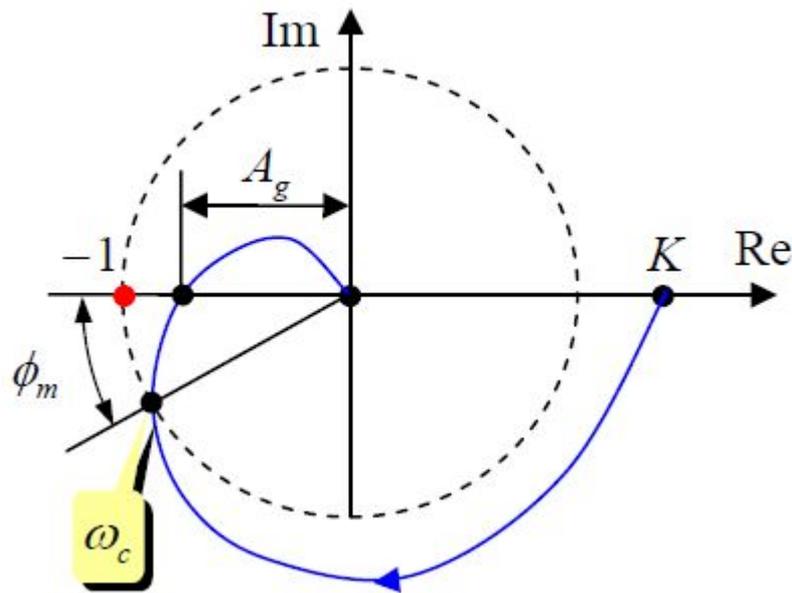


# 6. Анализ систем управления

- **6.7. Частотные оценки качества**
- Качество системы можно оценивать не только во временной области (переходный процесс во времени), но и в частотной (по частотной характеристике). Из частотных оценок наиболее важны **запасы устойчивости**.
- Дело в том, что поведение реального объекта всегда несколько отличается от принятой модели, более того, динамика может меняться во времени, например, когда корабль расходует топливо в ходе рейса. Поэтому недостаточно спроектировать просто устойчивую систему, нужно, чтобы система сохранила устойчивость при некоторых изменениях параметров объекта и регулятора в сравнении с расчетными, то есть, обладала запасами устойчивости.

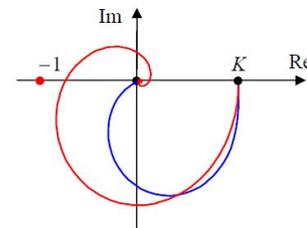
## 6. Анализ систем управления

- Обычно рассматривают запасы устойчивости по амплитуде и по фазе. **Запас устойчивости по амплитуде**  $g_m$  – это дополнительное усиление контура, которое необходимо, чтобы вывести систему на границу области устойчивости. Эта величина измеряется в децибелах.
- Запас по амплитуде вычисляется по формуле  $g_m = 20 \lg \frac{1}{A_g}$ , где  $A_g < 1$ .
- – значение амплитудной характеристики на частоте  $\omega_g$ , где фазовая характеристика равна  $-180^\circ$ . В практических задачах нужно обеспечивать запас по амплитуде не менее 6 дБ.



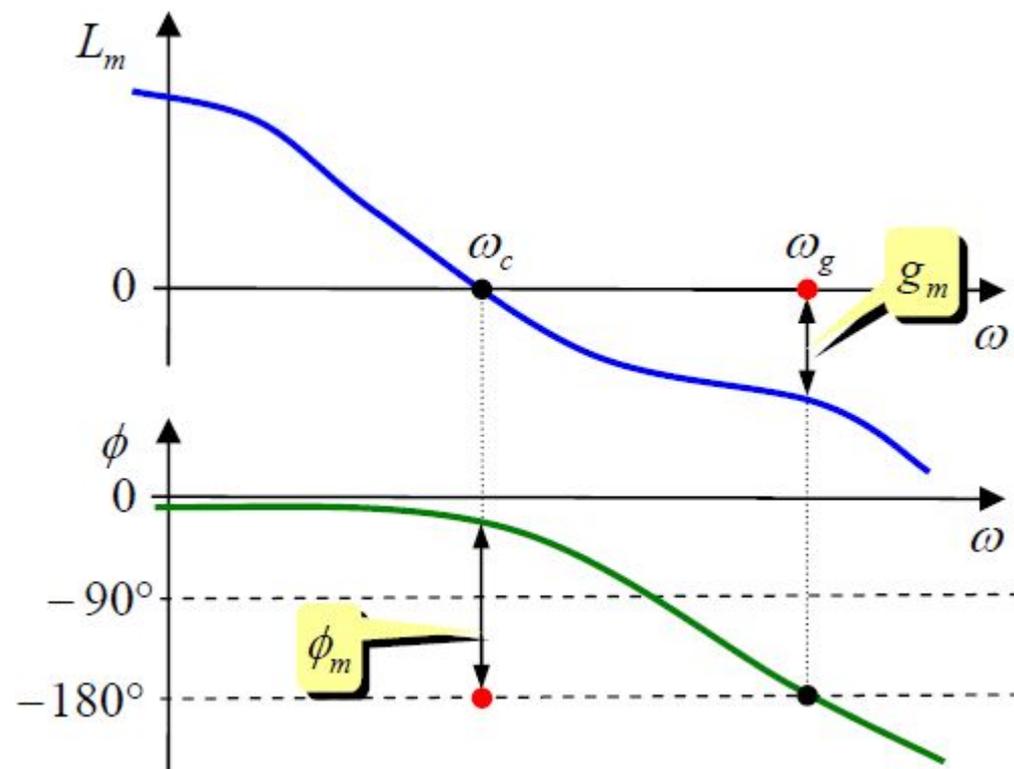
## 6. Анализ систем управления

- **Запас устойчивости по фазе  $\varphi_m$**  – это дополнительный сдвиг фазы («поворот» частотной характеристики против часовой стрелки), который необходим для того, чтобы вывести систему на границу устойчивости. Он определяется на *частоте среза  $\omega_c$* , где  $A(\omega_c) = 1$ . Запас по фазе должен быть не менее  $30^\circ$
- Если в системе есть запаздывание на время  $t$ , каждая точка годографа частотной характеристики дополнительно поворачивается против часовой стрелки на угол, равный  $\omega t$  для частоты  $\omega$ . Поэтому запасы устойчивости (как по амплитуде, так и по фазе) уменьшаются. На рисунке синяя линия соответствует системе без запаздывания, а красная – той же системе с запаздыванием. Видно, что во втором случае запасы устойчивости существенно меньше.



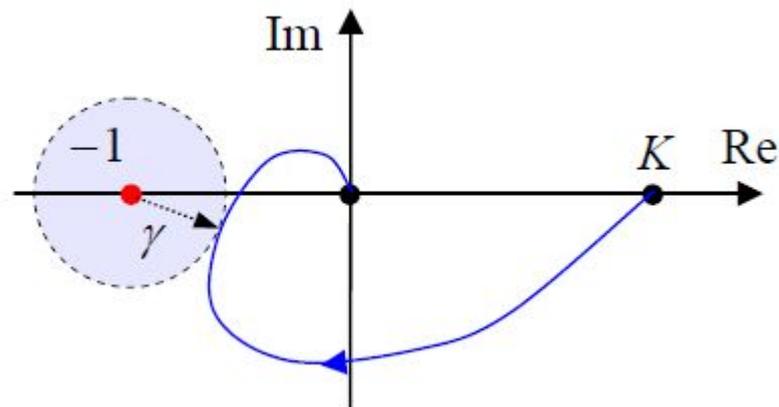
## 6. Анализ систем управления

- Запасы устойчивости легко определяются по логарифмическим частотным характеристикам:
- Заметим, что запас по амплитуде может быть равен бесконечности, если фазовая характеристика не пересекает линию  $-180^\circ$ .



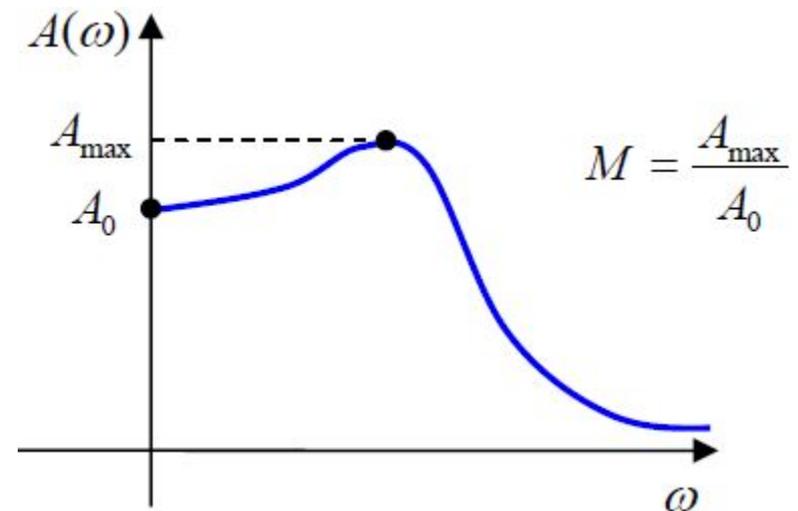
## 6. Анализ систем управления

- К сожалению, в некоторых случаях классические запасы устойчивости (по амплитуде и фазе) дают не совсем верное представление о том, насколько система действительно близка к границе устойчивости. Поэтому в качестве единой характеристики иногда используют кратчайшее расстояние  $\gamma$  от годографа до точки  $(-1; 0)$ .



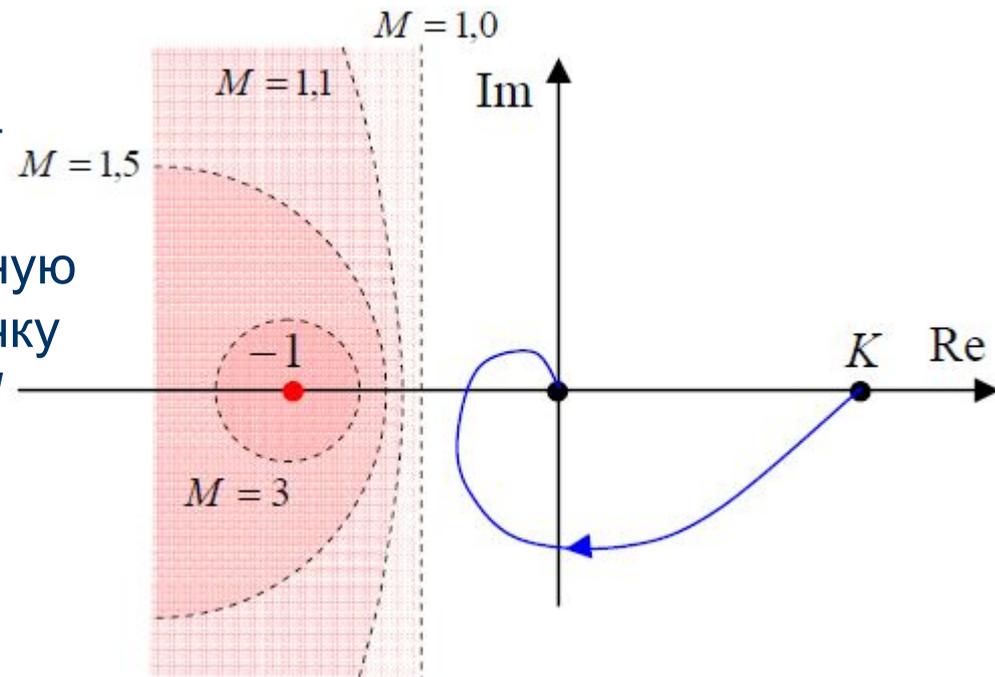
## 6. Анализ систем управления

- Еще одна аналогичная характеристика называется **показателем колебательности**  $M$ . Она определяется по амплитудной частотной характеристике *замкнутой* системы как отношение ее максимума к значению на нулевой частоте:
- Для каждого значения  $M$  можно нарисовать «запретную области», в которую не должна заходить частотная характеристика *разомкнутой* системы, если ее показатель колебательности должен быть меньше  $M$ .



## 6. Анализ систем управления

- Эта область имеет форму круга радиуса  $R = \frac{M}{M^2 - 1}$
- , центр которого находится в точке  $\left(-\frac{M^2}{M^2 - 1}; 0\right)$
- На рисунке показаны границы
- запретных областей для раз-
- личных значений  $M$ .
- При  $M = 1$  окружность имеет бесконечный радиус (превращается в вертикальную линию) и проходит через точку  $(-0,5; 0)$  . При увеличении  $M$  радиус окружности уменьшается.



# 6. Анализ систем управления

- **6.8. Корневые оценки качества**
- Многие свойства системы можно предсказать, посмотрев на расположение корней характеристического полинома  $\Delta(s)$  на комплексной плоскости. Прежде всего, все корни  $\Delta(s)$  для устойчивой системы должны находиться в левой полуплоскости, то есть слева от мнимой оси.
- Быстродействие системы определяется **степенью устойчивости**  $\eta$  – так называется расстояние мнимой оси до ближайшего корня (или пары комплексно-сопряженных корней).

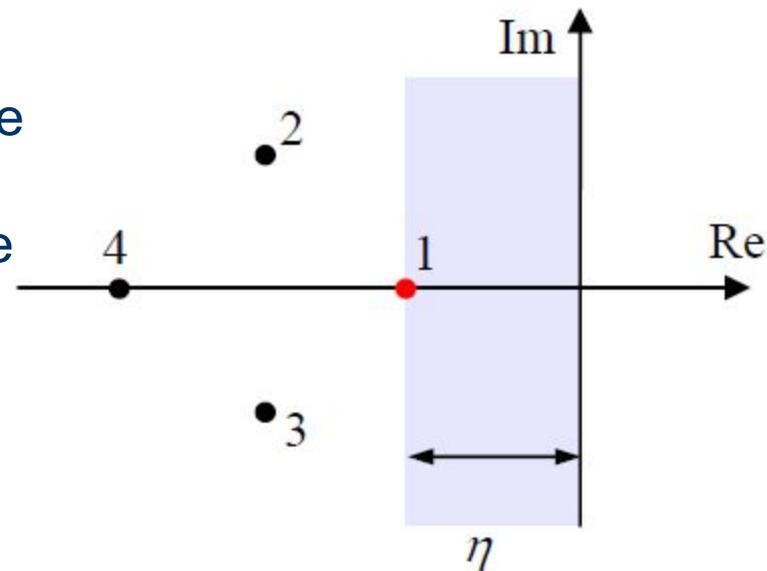
## 6. Анализ систем управления

- На рисунке точками отмечены положения корней характеристического полинома. Он имеет два вещественных корня (обозначенных номерами 1 и 4) и пару комплексно сопряженных корней (2 и 3). Степень устойчивости определяется вещественным корнем 1, потому что он находится ближе всех к мнимой оси.

- Этот корень называется *доминирующим*, он определяет самые медленные движения в системе и время переходного процесса, которое может быть примерно рассчитано по формуле

$$t_n = \frac{3}{\eta}$$

- Корни 2, 3 и 4 соответствуют более быстрым движениям.

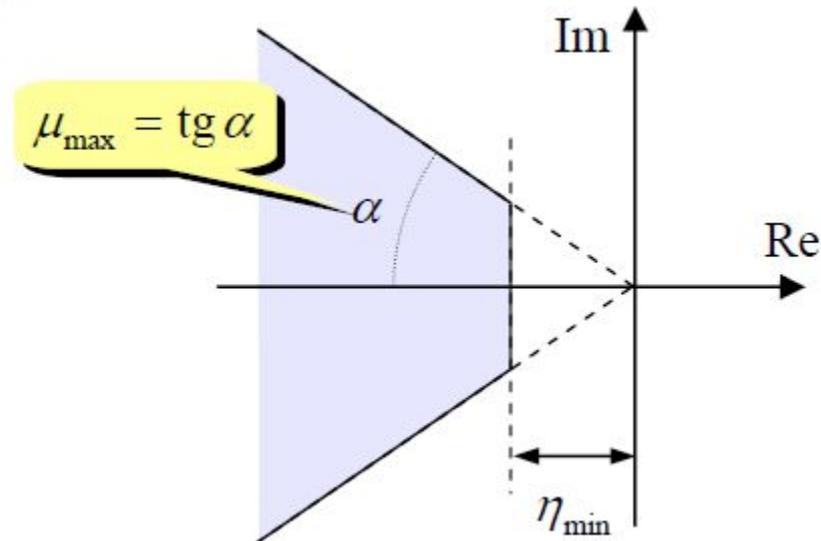


## 6. Анализ систем управления

- Обратите внимание, что степень устойчивости, несмотря на название, ничего не говорит о близости системы к границе устойчивости, она только характеризует быстродействие.
- Параметр, определяющий скорость затухания колебаний в системе, называется *колебательностью*.
- Колебательность  $\mu$  для пары комплексно-сопряженных корней
- $\alpha \pm j\beta$  вычисляется как отношение мнимой и вещественной частей корня (по модулю):
$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$$
- Чем больше эта величина, тем слабее затухают колебания, вызванные этими корнями, за 1 период колебаний.
- Линии постоянной колебательности – это лучи, выходящие из начала координат.

## 6. Анализ систем управления

- При проектировании систем обычно требуется обеспечить быстродействие не ниже заданного (степень устойчивости не меньше заданной  $\eta_{\min}$ ) и колебательность не выше заданной  $\mu_{\max}$ . Эти условия определяют усеченный сектор на комплексной плоскости.



# 6. Анализ систем управления

- **6.9. Робастность**

- *6.9.1. Что такое робастность?*

- Обычно регулятор строится на основе некоторых приближенных (*номинальных*) моделей объекта управления (а также приводов и датчиков) и внешних возмущений. При этом поведение реального объекта и характеристики возмущений могут быть несколько иными. Поэтому требуется, чтобы разработанный регулятор обеспечивал устойчивость и приемлемое качество системы при малых отклонениях свойств объекта и внешних возмущений от номинальных моделей.
- В современной теории управления это свойство называют *робастностью* (грубостью).
- Иначе его можно назвать нечувствительностью к малым ошибкам моделирования объекта и возмущений.

## 6. Анализ систем управления

- Различают несколько задач, связанных с робастностью:
- **робастная устойчивость** – обеспечить *устойчивость* системы при всех допустимых отклонениях модели *объекта* от номинальной;
- **робастное качество** – обеспечить *устойчивость* и заданные *показатели качества* системы при всех допустимых отклонениях модели *объекта* от номинальной;
- **гарантирующее управление** – обеспечить заданные показатели качества системы при всех допустимых отклонениях модели *возмущения* от номинальной (считая, что модель объекта известна точно).
- Для того, чтобы исследовать робастность системы, нужно как-то определить возможную ошибку моделирования (неопределенность). Ее можно задать различными способами.

## 6. Анализ систем управления

### • 6.9.2. Параметрическая неопределенность

- Параметрическая неопределенность означает, что структура модели известна, а параметры могут отличаться от номинальных, например:

$$P(s) = \frac{k_0 + \varepsilon_1}{(T_0 + \varepsilon_2)s + 1}$$

- где  $k_0$  и  $T_0$  – номинальные значения коэффициента усиления и постоянной времени, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – малые ошибки моделирования.
- Предположим, что такой объект управляется регулятором-усилителем с передаточной функцией  $C(s) = K$ . Тогда характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$\Delta(s) = (T_0 + \varepsilon_2)s + 1 + K(k_0 + \varepsilon_1)$$

- Робастный регулятор должен обеспечивать устойчивость этого полинома при всех допустимых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

## 6. Анализ систем управления

- В данном случае условия устойчивости сводятся к тому, что коэффициенты полинома,  $T_0 + \varepsilon_2$  и  $1 + K(k_0 + \varepsilon_1)$ , имеют одинаковый знак (оба положительные или оба отрицательные).
- Будем считать, что  $k_0 > 0$  и  $T_0 > 0$ , а отклонения  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  малы в сравнении с  $k_0$  и  $T_0$  соответственно.
- Таким образом,  $T_0 + \varepsilon_2 > 0$  при всех возможных  $\varepsilon_2$ . Следовательно, замкнутая система устойчива при

$$1 + K(k_0 + \varepsilon_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad K > \frac{-1}{k_0 + \varepsilon_1}$$

- Наибольшее значение в правой части последнего неравенства будет при максимальном значении  $\varepsilon_1$ , поэтому условие робастной устойчивости принимает вид

$$K > K_{\min} = \frac{-1}{k_0 + \varepsilon_{1\max}}$$

## 6. Анализ систем управления

- Таким образом, любой регулятор-усилитель, имеющий коэффициент усиления  $K > K_{\min}$ , обеспечивает робастную устойчивость системы в том смысле, что устойчивость сохраняется при всех допустимых ошибках  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .
- В более сложных случаях часто используют *теорему Харитонова*, которая позволяет проверить робастную устойчивость характеристического полинома

$$\Delta(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n,$$

- где коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  точно неизвестны, но принадлежат интервалам

$$\ell_i < a_i < u_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

## 6. Анализ систем управления

- Оказывается, полином  $\Delta(s)$  устойчив при всех возможных значениях коэффициентов тогда и только тогда, когда устойчивы четыре полинома Харитонова:

$$\Delta_1(s) = l_0 + l_1s + u_2s^2 + u_3s^3 + l_4s^4 + l_5s^5 + \dots$$

$$\Delta_2(s) = u_0 + u_1s + l_2s^2 + l_3s^3 + u_4s^4 + u_5s^5 + \dots$$

$$\Delta_3(s) = l_0 + u_1s + u_2s^2 + l_3s^3 + l_4s^4 + u_5s^5 + \dots$$

$$\Delta_4(s) = u_0 + l_1s + l_2s^2 + u_3s^3 + u_4s^4 + l_5s^5 + \dots$$

- Таким образом, для проверки устойчивости *бесконечного* числа возможных характеристических полиномов достаточно проверить устойчивость *четырёх* полиномов Харитонова.

## 6. Анализ систем управления

- 6.9.3. *Непараметрическая неопределенность*
- Непараметрическая неопределенность задает допустимую ошибку в частотной области, то есть ошибку в частотных характеристиках. Для номинальной модели  $P_0(j\omega)$  различают *аддитивную* неопределенность (абсолютную ошибку)  $\Delta_a(j\omega)$  :

$$P(j\omega) = P_0(j\omega) + \Delta_a(j\omega)$$

- и *мультипликативную* неопределенность (относительную ошибку)  $\Delta_m(j\omega)$  : в  $P(j\omega) = [1 + \Delta_m(j\omega)] P_0(j\omega)$ . известен очень простой **критерий робастной устойчивости**: система с регулятором  $C(s)$  и номинальный объектом  $P_0(s)$  робастно устойчива, если для любой частоты  $\omega$  выполняется неравенство

$$|W_0(j\omega) \hat{\Delta}_m(j\omega)| < 1, \quad (50)$$

## 6. Анализ систем управления

- Где  $W_0(s)$  – передаточная функция номинальной замкнутой системы:

$$W_0(s) = \frac{C(s) P_0(s)}{1 + C(s) P_0(s)}.$$

- Этот результат называется *теоремой о малом коэффициенте усиления*. При этом также требуется, чтобы реальная и номинальная модели объекта,  $P(s)$  и  $P_0(s)$ , имели одинаковые неустойчивые полюса, то есть неопределенность не должна вносить новые источники неустойчивости.
- Условие (50) – это *достаточное* условие робастной устойчивости, то есть, его выполнение гарантирует устойчивость, но для некоторых робастно устойчивых систем оно может не выполняться.

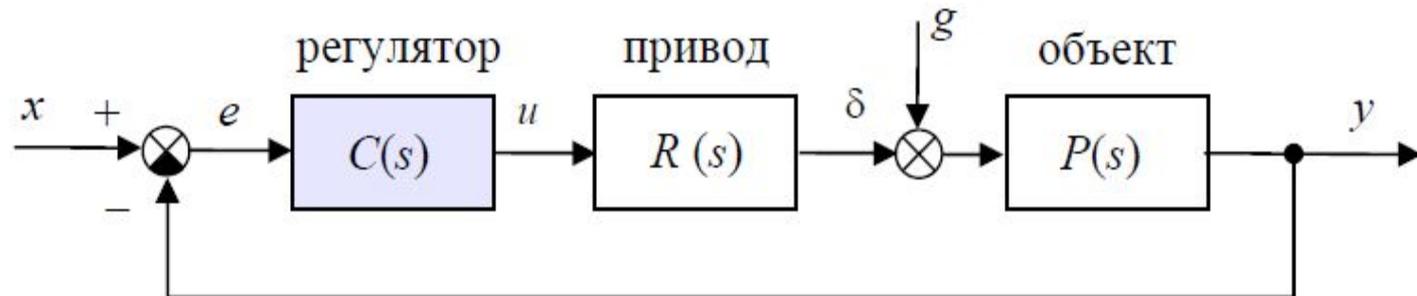
## 6. Анализ систем управления

- Обычно модель строится так, чтобы хорошо описывать свойства реального объекта на низких частотах, а для высоких частот ошибка моделирования  $\Delta_m(j\omega)$  может быть значительной.
- Тогда, учитывая (50), можно сделать вывод, что с точки зрения робастной устойчивости значение  $|W_0(j\omega)|$  должно быть мало на высоких частотах, где велика неопределенность модели.

# 7. Синтез регуляторов

## 7.1. Классическая схема

- Чаще всего регулятор включается перед объектом, как показано на схеме:



- Задача системы управления состоит в том, чтобы подавить действие внешнего возмущения  $g$  и обеспечить быстрые и качественные переходные процессы.
- К сожалению, эти задачи часто противоречивы. Фактически нам нужно скорректировать систему так, чтобы она имела нужные передаточные функции по возмущению ( $W_g(s)$ , от входа  $g$  к выходу  $y$ ) и по задающему воздействию ( $W(s)$ , от входа  $x$  к выходу  $y$ )

## 7. Синтез регуляторов

$$W_g(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)R(s)P(s)}, \quad W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + C(s)R(s)P(s)}.$$

- Для этого мы можем использовать только *один* регулятор  $C(s)$ , поэтому такую систему называют системой с *одной степенью свободы*.
- Легко проверить, что эти две передаточные функции связаны равенством  $W_g(s) = [1 - W(s)]P(s)$ .
- Поэтому, изменяя одну из передаточных функций, мы автоматически меняем и вторую. Таким образом, их невозможно сформировать независимо и решение всегда будет некоторым *компромиссом*.
- Посмотрим, можно ли в такой системе обеспечить нулевую ошибку, то есть, абсолютно точное отслеживание входного сигнала.

# 7. Синтез регуляторов

- Передаточная функция по ошибке (от входа  $x(t)$  к ошибке  $e(t)$  ) равна

$$W_e(s) = \frac{1}{1 + C(s)R(s)P(s)}$$

- Для того, чтобы ошибка всегда была нулевой, требуется, чтобы эта передаточная функция была равна нулю. Поскольку ее числитель – не нуль, сразу получаем, что знаменатель должен обращаться в бесконечность. Мы можем влиять только на регулятор  $C(s)$  (остальные элементы заданы заранее), поэтому получаем  $C(s) \rightarrow \infty$ .
- Таким образом, для уменьшения ошибки нужно увеличивать коэффициент усиления регулятора. Это так называемый принцип глубокой обратной связи.

# 7. Синтез регуляторов

- Однако нельзя увеличивать усиление до бесконечности. Во-первых, все реальные устройства имеют предельно допустимые значения входных и выходных сигналов.
- Во-вторых, при большом усилении контура ухудшается качество переходных процессов, усиливается влияние возмущений и шумов, система может потерять устойчивость.
- Поэтому в схеме с одной степенью свободы обеспечить нулевую ошибку слежения невозможно.
- Посмотрим на задачу с точки зрения частотных характеристик. С одной стороны, для качественного отслеживания задающего сигнала  $x(t)$  желательно, чтобы частотная характеристика  $W(j\omega)$  была примерно равна 1 (в этом случае  $y(t) \approx x(t)$ ).

# 7. Синтез регуляторов

- С другой стороны, с точки зрения робастной устойчивости нужно обеспечить  $W(j\omega) \approx 0$  на высоких частотах, где ошибка моделирования велика. Кроме того, передаточная функция по возмущению должна быть такой, чтобы эти возмущения подавлять, в идеале мы должны обеспечить  $W_g(j\omega) \approx 0$ .
- Выбирая компромиссное решение, обычно поступают следующим образом:
- 1) на *низких* частотах добиваются выполнения условия  $W(j\omega) \approx 1$ , что обеспечивает хорошее слежение за низкочастотными сигналами; при этом  $W_g(j\omega) \approx 0$ , то есть, низкочастотные возмущения подавляются;

# 7. Синтез регуляторов

- 2) на *высоких* частотах стремятся сделать  $W(j\omega) \approx 0$ , чтобы обеспечить робастную устойчивость и подавление шума измерений; при этом  $\downarrow W_g(j\omega) \approx P(j\omega)$ ; , то есть система фактически работает как разомкнутая, регулятор не реагирует на высокочастотные помехи.
- **7.2. ПИД-регуляторы**
- Несмотря на развитые современные методы проектирования сложных регуляторов, подавляющее большинство промышленных систем управления основаны на регуляторах первого и второго порядка. Эти регуляторы во многих случаях могут обеспечить приемлемое управление, легко настраиваются и дешевы при массовом изготовлении.

# 7. Синтез регуляторов

- Простейший регулятор – пропорциональный или **П-регулятор** – это простой усилитель с передаточной функцией  $C(s) = K$ . Его выход – это *ошибка управления*  $e(t)$ , умноженная на коэффициент  $K$ .
- С помощью П-регулятора можно управлять любым устойчивым объектом, однако он дает относительно медленные переходные процессы и ненулевую статическую ошибку.
- Чтобы убрать статическую ошибку в установившемся режиме, в регулятор вводят *интегральный канал* с коэффициентом усиления  $K_I$ , так что

$$C(s) = K + \frac{K_I}{s}, \quad u(t) = Ke(t) + K_I \int_0^t e(t) dt.$$

# 7. Синтез регуляторов

- Такой регулятор называется пропорционально-интегральным или **ПИ-регулятором**. Интегратор выдает сигнал, пропорциональный *накопленной* ошибке, поэтому переходный процесс несколько замедляется. Однако за счет интегрального канала обеспечивается нулевая ошибка в установившемся состоянии при ступенчатом возмущении и ступенчатом изменении задающего сигнала-уставки.
- Для ускорения переходных процессов добавляют *дифференциальный канал* с коэффициентом усиления  $K_D$  :

$$C(s) = K + \frac{K_I}{s} + K_D s, \quad u(t) = K e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt}.$$

# 7. Синтез регуляторов

- Такой регулятор называется **ПИД-регулятором** (пропорционально-интегрально дифференциальный). Регуляторы этого типа очень хорошо зарекомендовали себя в практических задачах. Кроме того, иногда используются **ПД-регуляторы** (пропорционально дифференциальные), у которых нет интегрального канала.
- Управление по производной – это быстрый способ управления. Сигнал дифференциального канала наиболее важен при изменениях входов и исчезает в установившемся режиме.
- Он позволяет реагировать не на само увеличение ошибки, а на *тенденцию* ее изменения, и принять «превентивные меры». Главный недостаток дифференциального канала – большое влияние высокочастотных помех, например, шумов измерений.

# 7. Синтез регуляторов

- Для того, чтобы сделать регулятор физически реализуемым, вместо чистого дифференцирования используют инерционное дифференцирующее звено:

$$C(s) = K + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{T_D s + 1}$$

- где  $T_D$  – малая постоянная времени. Чем меньше  $T_D$ , тем в большем частотном диапазоне выполняется точное дифференцирование, но сильнее влияют высокочастотные помехи.
- Для устойчивого объекта можно выбрать коэффициенты регулятора опытным путем, выполняя эксперименты с реальным объектом. Предложено несколько методов решения этой задачи, например, правила Зиглера-Никольса или Коэна-Куна.

# 7. Синтез регуляторов

- Можно показать (сделайте это самостоятельно), что любой регулятор второго порядка с интегратором может быть представлен в форме ПИД-регулятора:

$$C(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s(b_1 s + b_0)} \Leftrightarrow C(s) = K + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{T_D s + 1}.$$

- **7.3. Метод размещения полюсов**
- Один из простых методов синтеза регулятора – *размещение полюсов* передаточной функции замкнутой системы, которые во многом определяют ее динамику, например, быстродействие и степень затухания колебаний (см. разд. 6.8). Смысл в том, чтобы разместить эти полюса в заданных точках комплексной плоскости с помощью специально выбранного регулятора. Эта задача сводится к решению системы линейных уравнений.

# 7. Синтез регуляторов

- Пусть передаточная функция объекта задана в виде отношения полиномов

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n_1s + n_0}{s^2 + d_1s + n_0}$$

Выберем регулятор вида

$$C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)} = \frac{a_1s + a_0}{b_1s + b_0},$$

- где  $a_0, a_1, b_0$  и  $b_1$  – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить. Характеристический полином замкнутой системы равен

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= n(s)n_c(s) + d(s)d_c(s) = (n_1s + n_0)(a_1s + a_0) + (s^2 + d_1s + d_0)(b_1s + b_0) \\ &= b_1s^3 + (n_1a_1 + d_1b_1 + b_0)s^2 + (n_0a_1 + n_1a_0 + d_0b_1 + d_1b_0)s + n_0a_0 + d_0b_0\end{aligned}$$

# 7. Синтез регуляторов

- Предположим, что мы хотим выбрать регулятор так, чтобы разместить корни полинома  $\Delta(s)$  в заданных точках, то есть добиться выполнения равенства  $\Delta(s) = s^3 + \delta_2 s^2 + \delta_1 s + \delta_0$ ,
- где  $\delta_i$  ( $i = 0, \dots, 2$ ) - заданные числа. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $s$  в последних двух равенствах, получаем

$$s^3 : b_1 = 1$$

$$s^2 : n_1 a_1 + d_1 b_1 + b_0 = \delta_2$$

$$s^1 : n_0 a_1 + n_1 a_0 + d_0 b_1 + d_1 b_0 = \delta_1$$

$$s^0 : n_0 a_0 + d_0 b_0 = \delta_0$$

# 7. Синтез регуляторов

- или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ n_1 & 0 & d_1 & 1 \\ n_0 & n_1 & d_0 & d_1 \\ 0 & n_0 & 0 & d_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix}.$$

- Решение уравнения имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ n_1 & 0 & d_1 & 1 \\ n_0 & n_1 & d_0 & d_1 \\ 0 & n_0 & 0 & d_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \delta_2 \\ \delta_1 \\ \delta_0 \end{bmatrix}.$$

# 7. Синтез регуляторов

- Конечно, квадратная матрица в этом выражении (она называется *матрицей Сильвестра*) должна быть обратима. Можно доказать, что она действительно обратима тогда и только тогда, когда полиномы  $n(s)$  и  $d(s)$  не имеют общих корней, то есть передаточная функция объекта  $P(s)$  несократима.
- В противном случае общий корень этих полиномов неизбежно будет корнем характеристического полинома  $\Delta(s)$ .
- Кроме того, для того, чтобы количество неизвестных коэффициентов было равно числу уравнений, порядок регулятора нужно выбирать не меньше, чем  $N - 1$ , где  $N$  – порядок модели объекта управления:

$$N = \max \{ \deg n(s), \deg d(s) \},$$

# 7. Синтез регуляторов

- где  $\deg$  обозначает степень полинома. Иначе полученное уравнение будет разрешимо только при специально выбранном полиноме  $\Delta(s)$ .
- Заметим, что при размещении полюсов мы никак не учитываем *нули* передаточной функции, которые также влияют на динамику системы.
- **7.4. Коррекция ЛАФЧХ**
- На протяжении многих лет самым популярным инженерным методом синтеза регуляторов был метод, основанный на использовании логарифмических частотных характеристик (ЛАФЧХ).

# 7. Синтез регуляторов

- Он основан на двух свойствах ЛАФЧХ:
- 1) логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики для последовательного соединения двух блоков (например, регулятора и объекта управления) равны сумме ЛАЧХ и ЛФЧХ этих блоков;
- 2) если передаточная функция объекта не имеет неустойчивых нулей и полюсов (с положительной вещественной частью), то амплитудная частотная характеристика однозначно определяет фазовую; отсюда следует что можно свести выбор регулятора к изменению *только* амплитудной характеристики нужным образом.
- Пусть  $G(s) = P(s) R(s)$  – передаточная функция объекта вместе с приводом, причем будет предполагать, что она не имеет неустойчивых нулей и полюсов (то есть, является *минимально-фазовой*).

# 7. Синтез регуляторов

- ЛАЧХ такого расширенного объекта обозначим как

$$L_0(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|.$$

- Если мы сможем каким-то образом найти желаемую ЛАЧХ  $L_{\text{ж}}(\omega)$ , то разница между этими двумя характеристиками – это и есть ЛАЧХ необходимого последовательного регулятора:

$$L_C(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_0(\omega). \quad (51)$$

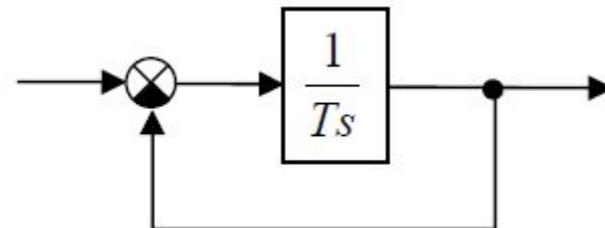
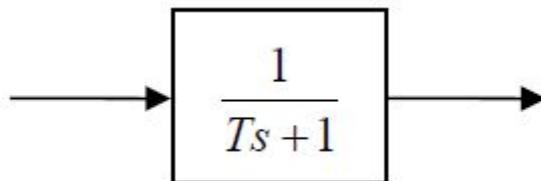
- Таким образом, для решения задачи требуется ответить на два вопроса:
  - 1) как выбрать желаемую ЛАЧХ  $L_{\text{ж}}(j\omega)$  так, чтобы обеспечить устойчивость и требуемое качество замкнутой системы?
  - 2) как получить передаточную функцию регулятора  $C(s)$  по его ЛАЧХ (51)?

# 7. Синтез регуляторов

- Чтобы ответить на первый вопрос, вспомним типичные требования к системе управления:
  - устойчивость;
  - нулевая ошибка в установившемся режиме;
  - быстрый и плавный (в идеале – монотонный) переходный процесс;
  - подавление шумов;
  - робастность (нечувствительность к ошибкам модели).
- Эти требования нужно связать с формой ЛАЧХ.

# 7. Синтез регуляторов

- Постоянный сигнал можно рассматривать как предельный случай гармонического (синуса), только с нулевой частотой. Поэтому для обеспечения нулевой установившейся ошибки цепочка «регулятор-объект» должна иметь бесконечное усиление на нулевой частоте, то есть передаточная функция  $G(s)C(s)$  должна содержать *интегратор* (вспомните принцип внутренней модели).
- Обычно хочется, чтобы переходный процесс был монотонным, без перерегулирования. Такой процесс дает апериодическое звено. Легко проверить, что передаточная функция апериодического звена (слева) равна передаточной функции интегратора, охваченного единичной обратной связью (справа):



# 7. Синтез регуляторов

- Таким образом, для получения монотонного переходного процесса ЛАЧХ разомкнутой системы должна быть похожа на ЛАЧХ интегратора – это прямая линия с наклоном  $-20$  дБ/дек, которая
- пересекает ось абсцисс на частоте  $\omega_c = 1/T$ . Эта частота называется *частотой среза*. Заметим, что для апериодического звена легко определить время переходного процесса: оно примерно равно  $3T$ .
- Таким образом, *частота среза определяет время переходного процесса*.

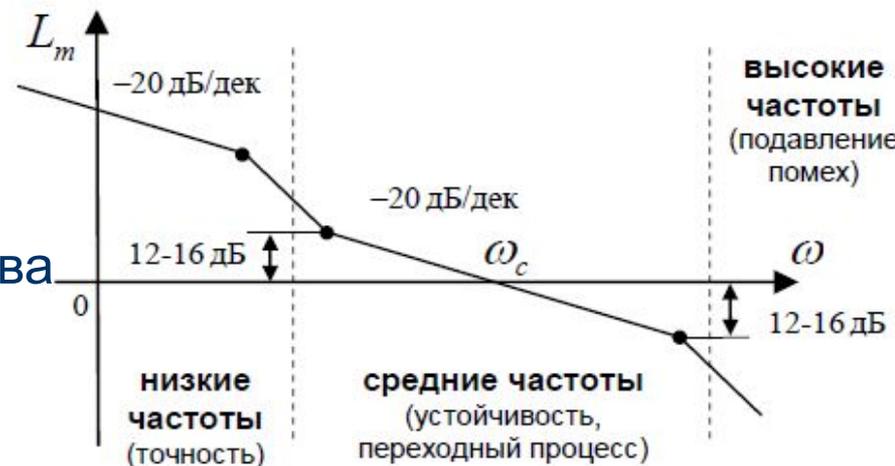
# 7. Синтез регуляторов

- Вспомним, что устойчивость системы также определяется поведением ЛАЧХ в районе частоты среза. В результате имеем:
  - устойчивость и качество переходного процесса (время, перерегулирование) определяются формой ЛАЧХ в районе частоты среза, где она пересекает ось  $L_m = 0$ ; эта область называется *областью средних частот*;
  - для получения качественного переходного процесса желательно, чтобы наклон ЛАЧХ около частоты среза был равен  $-20$  дБ/дек;
  - если задано время переходного процесса  $t_n$ , нужно выбрать.

$$\omega_c = \frac{3}{t_n}.$$

# 7. Синтез регуляторов

- Теперь разберемся с шумами и робастностью. Как мы знаем, шумы – это высокочастотные сигналы. Кроме того, обычно именно в области высоких частот характеристики объекта и модели могут сильно расходиться.
- Поэтому для подавления помех и уменьшения влияния ошибок модели нужно по возможности уменьшать усиление системы в области высоких частот, то есть ЛАЧХ должна резко идти вниз.
- На рисунке показана типовая желаемая ЛАЧХ. Это *асимптотическая* ЛАЧХ, состоящая из отрезков. В выделенных точках стыкуются два отрезка разного наклона.



# 7. Синтез регуляторов

- На низких частотах она имеет наклон  $-20$  дБ/дек, то есть система содержит интегратор, который обеспечивает нулевую ошибку в установившемся режиме.

# 7. Синтез регуляторов

- На низких частотах она имеет наклон  $-20$  дБ/дек, то есть система содержит интегратор, который обеспечивает нулевую ошибку в установившемся режиме.
- ЛАЧХ пересекает ось абсцисс под наклоном  $-20$  дБ/дек. Для обеспечения устойчивости и приемлемого показателя колебательности ( $M < 1,2$ ) точки излома ЛАЧХ должны находиться на расстоянии 12-16 дБ от оси абсцисс (см. рисунок).
- Продемонстрируем метод коррекции ЛАЧХ на простом примере. Пусть объект управления – апериодическое звено с передаточной функцией

$$G(s) = \frac{1}{T_0 s + 1}, \text{ где } T_0 = 5 \text{ с}$$

# 7. Синтез регуляторов

- Передаточная функция замкнутой системы без коррекции (то есть, с регулятором  $C_0(s) = 1$  равна:

$$W(s) = \frac{1}{T_0s + 2} = \frac{0,5}{0,5T_0s + 1}.$$

- Видим, что статический коэффициент усиления  $W(0) = 0,5$  (а не 1), так что точного отслеживания входного сигнала не получается. Время переходного процесса можно приблизительно подсчитать
- как  $t_n = 3 \cdot 0,5 \cdot T_0 = 7,5 c$
- Поставим задачу следующим образом: выбрать регулятор  $C(s)$ , который обеспечивает
  - нулевую ошибку в установившемся режиме;
  - время переходного процесса около 1,5 с; .

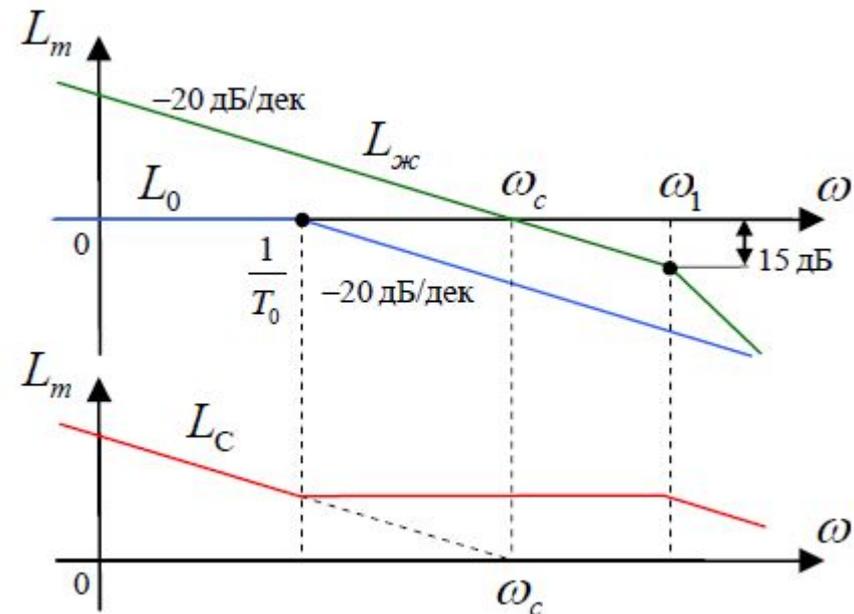
# 7. Синтез регуляторов

- наклон ЛАЧХ  $-40$  дБ/дек на высоких частотах для подавления помех. Для решения используем метод коррекции ЛАЧХ. Синяя линия на рисунке обозначает нескорректированную ЛАЧХ, совпадающую с ЛАЧХ апериодического звена  $G(s)$ .

- Желаемая ЛАЧХ (зеленая линия) должна иметь наклон  $-20$  дБ/дек на низких частотах, чтобы обеспечить нулевую статическую ошибку. Частота среза  $\omega_c$

- определяется требуемым быстродействием:

$$\omega_c = 3/t_n = 2 \text{ рад/с.}$$



## 7. Синтез регуляторов

- Таким образом, начальный участок желаемой ЛАЧХ совпадает с ЛАЧХ интегрирующего звена с передаточной функцией  $\frac{\omega_c}{s}$
- , то есть 
$$L_{ж}(\omega) = 20 \lg \frac{\omega_c}{\omega} \text{ (на низких частотах).}$$
- На высоких частотах нужно изменить наклон ЛАЧХ с  $-20$  до  $-40$  дБ/дек на частоте  $\omega_1$ , где  $L_m(\omega) = -15$  дБ. Из этого условия находим 
$$20 \lg \frac{\omega_c}{\omega_1} = -15 \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_1} = 10^{-15/20} \Rightarrow \omega_1 = 10^{3/4} \cdot \omega_c = 5,62 \cdot 2 = 11,24 \text{ рад/с.}$$
- Таким образом, мы полностью построили желаемую ЛАЧХ, удовлетворяющую требованиям к системе. Вычитая из нее исходную ЛАЧХ (без коррекции, синяя линия), получим ЛАЧХ регулятора, которая показана красной линией на нижнем графике.

# 7. Синтез регуляторов

- Остается перейти от ЛАЧХ регулятора к его передаточной функции. На низких частотах ( $\omega_0 < 1/T$ ) ЛАЧХ регулятора имеет наклон  $-20$  дБ/дек и проходит через точку  $(\omega_c; 0)$

- , то есть

$$C(s) = \frac{\omega_c}{s} \cdot C_1(s),$$

- где  $C_1(s)$  не изменяет асимптотическую ЛАЧХ на частотах, меньших  $1/T_0$ . На частоте  $\omega_0 = 1/T_0$  ЛАЧХ регулятора меняет наклон с  $-20$  дБ/дек до нуля, то есть в числитель добавляется множитель  $1 + T_0 s$

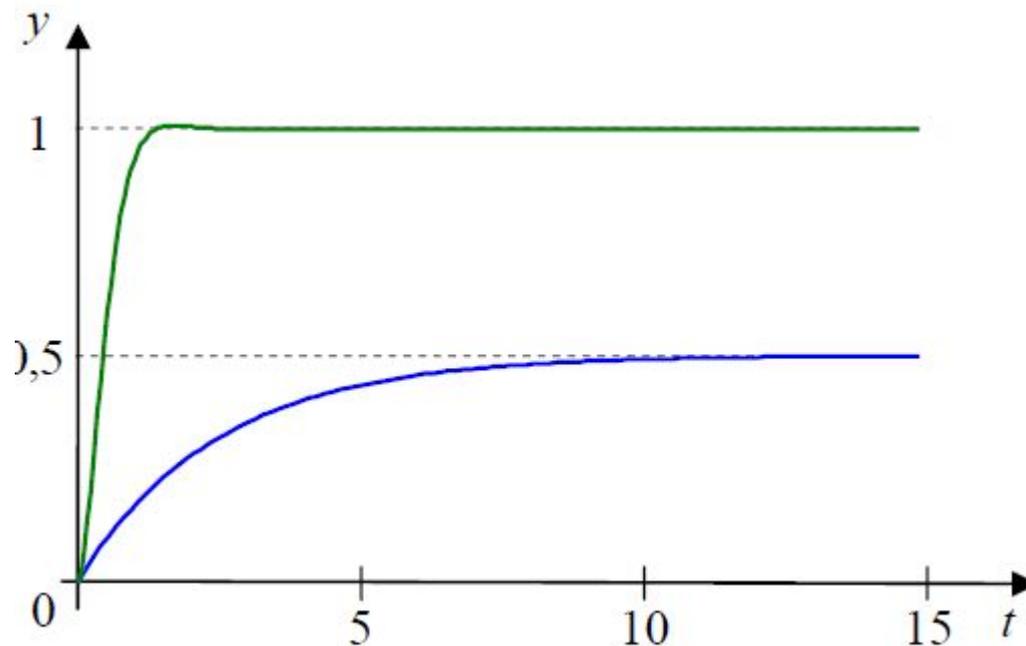
$$C(s) = \frac{\omega_c (T_0 s + 1)}{s} \cdot C_2(s).$$

# 7. Синтез регуляторов

- Здесь  $C_2(s)$  – регулятор, не влияющий на ЛАЧХ для частот, меньших  $\omega_1$ . Наконец, на частоте  $\omega_1$  наклон увеличивается с нуля до  $-20$  дБ/дек. Для того, чтобы на этой частоте «загнуть» вниз ЛАЧХ, нужно добавить в регулятор апериодическое звено с постоянной времени  $T_1$ , где
- . Таким образом, окончательно 
$$C(s) = \frac{\omega_c (T_0 s + 1)}{s (T_1 s + 1)}$$
- На рисунке показаны переходные процессы при единичном ступенчатом входном сигнале в нескорректированной системе (синяя линия) и в системе с полученным регулятором  $C(s)$
- (зеленая линия). Графики показывают, что найденный регулятор значительно ускорил переходный процесс и обеспечил нулевую статическую ошибку (установившееся значение выхода равно 1).

# 7. Синтез регуляторов

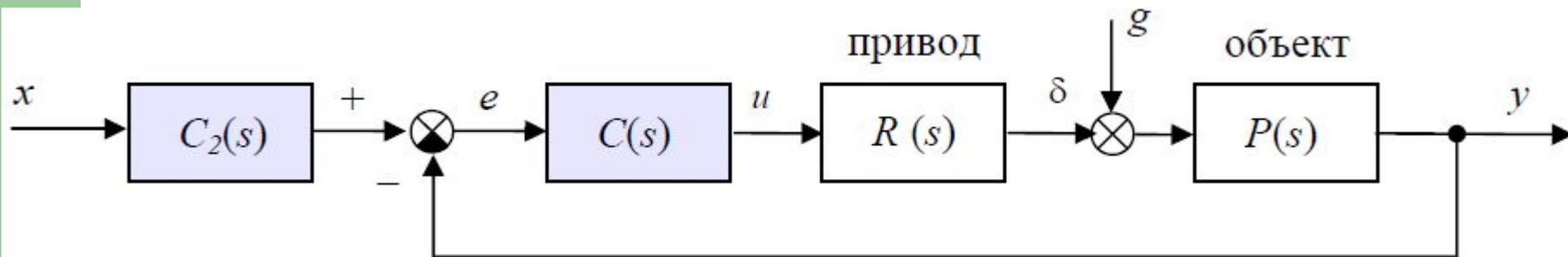
- Нужно отметить, что алгоритм коррекции ЛАЧХ существенно усложняется, если объект содержит неустойчивые или неминимально-фазовые звенья.



# 7. Синтез регуляторов

## 7.5. Комбинированное управление

- Один из способов улучшить качество управление – изменить *структуру* системы, добавив в нее второй регулятор  $C_2(s)$  на входе:



- Теперь

$$W(s) = \frac{C_2(s)C(s)R(s)P(s)}{1 + C(s)R(s)P(s)}$$

- Влияет ли регулятор 2 на свойства *контура* управления (запасы устойчивости, подавление возмущений, робастность)?

# 7. Синтез регуляторов

- Регулятор  $C_2(s)$  не влияет на свойства *контура* управления (запасы устойчивости, подавление возмущений, робастность), а влияет только на переходные процессы при изменении задающего воздействия.
- Поэтому сначала можно, не обращая внимание на переходные процессы, построить регулятор в контуре  $C(s)$  так, чтобы обеспечить нужный уровень подавления возмущений и робастность, а затем сформировать нужные качества передаточной функции  $W(s)$  с помощью регулятора  $C_2(s)$ .
- Поскольку две передаточные функции можно изменять независимо друг от друга, такая схема называется *комбинированным управлением* (или *управлением с двумя степенями свободы*).

# 7. Синтез регуляторов

- В идеале мы хотим, чтобы система точно воспроизводила сигнал  $x(t)$  на выходе  $y(t)$ , то есть, нужно обеспечить  $W(s) \equiv 1$ . Для этого требуется, чтобы

$$C_2(s) = \frac{1 + C(s)R(s)P(s)}{C(s)R(s)P(s)} = \frac{1}{W_1(s)}, \quad (52)$$

где  $W_1(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + C(s)R(s)P(s)}$  – передаточная функция замкнутой системы с одной степенью свободы.

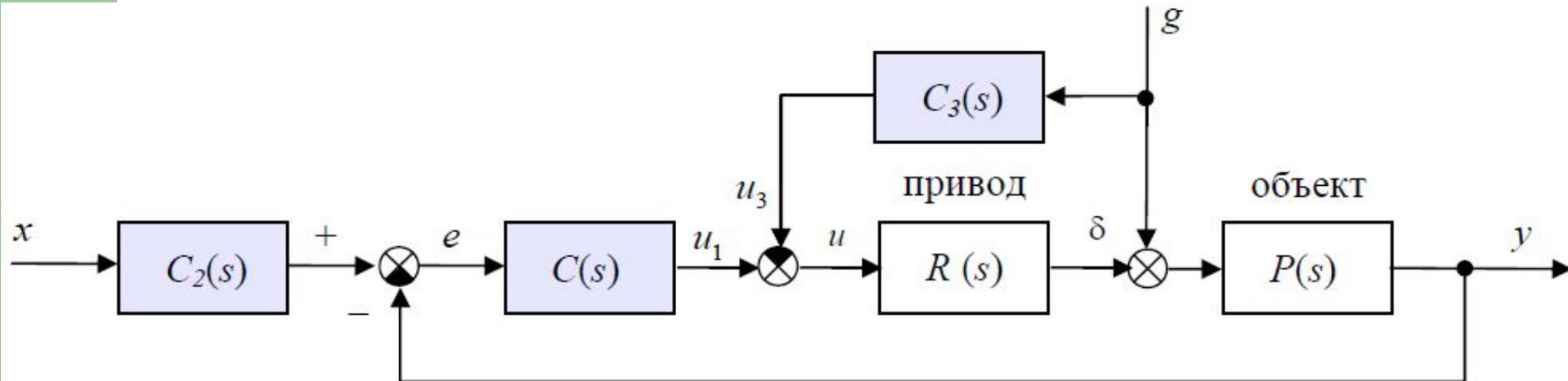
- Из (52) следует, что регулятор  $C_2(s)$  должен быть *обратной* системой (*инверсией*) для  $W_1(s)$ . Частотная характеристика  $W_1(j\omega)$  в реальных системах близка к нулю на высоких частотах, следовательно, регулятор  $C_2(s)$  должен иметь в этом частотном диапазоне огромное усиление.

## 7. Синтез регуляторов

- Например, для  $W_1(s) = \frac{1}{Ts+1}$  получим  $C_2(s) = Ts+1$ , то есть регулятор содержит физически нереализуемое дифференцирующее звено. Таким образом, точная инверсия (52) не может применяться в практических задачах.
- Обычно стараются приближенно обеспечить равенство (52) для тех частот, где важно точно отследить задающий сигнал.
- Отметим, что существуют и другие схемы с двумя степенями свободы, но можно доказать, что все они эквивалентны, разница только в реализации.

# 7. Синтез регуляторов

- **7.6. Инвариантность**
- Если возмущение  $g$  можно как-то измерить, для улучшения качества системы иногда вводится третий регулятор (*третья степень свободы*):



## 7. Синтез регуляторов

- Теперь передаточная функция по возмущению равна

$$W_g(s) = \frac{[1 - C_3(s)R(s)]P(s)}{1 + C(s)R(s)P(s)}$$

- В этом случае теоретически есть возможность обеспечить полную компенсацию возмущения  $g$ , выбрав

$$C_3(s) = \frac{1}{R(s)}, \quad (53)$$

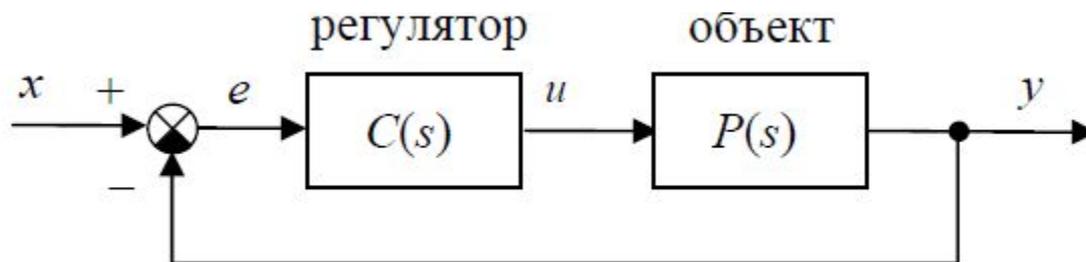
- так что  $W_g(s) = 0$ . Это условие называется *условием инвариантности* (неизменности), поскольку в этом случае система абсолютно подавляет *любые* возмущения по входу  $g$ .
- Заметим, что мы снова пришли к идее *инверсии* (построения *обратной* системы), как и в (52).

# 7. Синтез регуляторов

- К сожалению, на практике условие инвариантности чаще всего невыполнимо, потому что регулятор  $C_3(s)$  должен быть *предсказывающим*, так как нужно подать компенсирующий сигнал на привод *раньше*, чем внешнее возмущение успеет повлиять на объект.
- Чаще всего получается, что числитель передаточной функции  $C_3(s)$  (53) должен иметь более высокую степень, чем знаменатель. Это значит, что такой регулятор включает звенья чистого дифференцирования, которые не являются физически реализуемыми. Обычно подбирают регулятор  $C_3(s)$  так, чтобы он был физически реализуемым, но условие (53) приближенно выполнялось в наиболее важном диапазоне частот.

# 7. Синтез регуляторов

- **7.7. Множество стабилизирующих регуляторов**
- Как известно, не каждый регулятор стабилизирует систему. Поэтому важно выделить множество регуляторов, которые обеспечивают устойчивость замкнутого контура.
- Такие регуляторы называются *стабилизирующими*. Желательно также получить *параметризацию*, то есть, представить все множество стабилизирующих регуляторов в виде формулы, зависящей от параметра, который может выбираться произвольно в некоторой допустимой области.
- Рассмотрим простейшую замкнутую систему:



## 7. Синтез регуляторов

- Ее передаточная функция равна

$$W(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}. \quad (54)$$

- Регулятор входит в нее *нелинейно*, что значительно усложняет анализ и синтез системы. Заметим, что эту функцию можно представить в виде

$$W(s) = Q(s)P(s), \quad \text{где} \quad Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)} \quad (55)$$

- Выражение (55) внешне выглядит как передаточная функция последовательного соединения объекта  $P(s)$  и «регулятора»  $Q(s)$ , причем оно *линейно* зависит от  $Q(s)$ .

# 7. Синтез регуляторов

- Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли сначала выбрать нужным образом  $Q(s)$ , а затем найти соответствующий ей регулятор, выразив его передаточную функцию из (55):

$$C(s) = \frac{Q(s)}{1 - Q(s)P(s)}. \quad (56)$$

- Очевидно, что функция  $Q(s)$  должна быть устойчивой, иначе передаточная функция замкнутой системы  $W(s)$  (55) также окажется неустойчивой.
- Оказывается, если объект  $P(s)$  устойчив, то регулятор, полученный из (56), всегда будет стабилизирующим. Более того, форма (56) охватывает *все возможные* стабилизирующие регуляторы.

# 7. Синтез регуляторов

- Поэтому (56) – это параметризация множества стабилизирующих регуляторов для устойчивого объекта, она называется **параметризацией Юла** (*D.C. Youla*).
- Параметром в (56) является устойчивая функция  $Q(s)$ , которая может выбираться произвольно. На практике регулятор (56) должен быть *физически реализуемым*. Это значит, что передаточная функция  $C(s)$  должна быть *правильной* (степень ее числителя не больше степени знаменателя). Для этого функция  $Q(s)$  также должна быть *правильной*.
- Теоретически для оптимального слежения нужно выбрать  $Q(s)=1/P(s)$ , что дает  $W(s) = 1$ , однако чаще всего это невозможно. Дело в том, что передаточная функция объекта в практических задачах – строго правильная (степень числителя *меньше* степени знаменателя), и  $Q(s)$  получается *неправильной*.

# 7. Синтез регуляторов

- Поэтому используют компромиссные решения, обеспечивая приближенную инверсию только для наиболее важной полосы частот.
- Существует множество методов синтеза, в которых устойчивая и правильная функция  $Q(s)$  выбирается в результате *численной оптимизации* по какому-либо критерию. Затем передаточная функция регулятора рассчитывается по формуле (56).
- Посмотрим, что получится, если попробовать применить такой подход для *неустойчивого* объекта с передаточной функцией

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Выбрав  $Q(s) = 1$ , из (56) получаем  $C(s) = \frac{s-1}{s-2}$

## 7. Синтез регуляторов

- При этом в произведении  $C(s)P(s) = \frac{s-1}{s-2} \cdot \frac{1}{s-1}$

- неустойчивый полюс модели объекта сокращается (*компенсируется*) неустойчивым нулем регулятора. Характеристический полином

$$\Delta(s) = s - 1 + (s - 2)(s - 1) = (s - 1)^2$$

- будет неустойчивым, как и вся замкнутая система. Следовательно, параметризацию (56) в этом случае использовать нельзя.
- Для неустойчивых объектов используют другую, более сложную параметризацию. Пусть

$$P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}, \text{ где } n(s) \text{ и } d(s) \text{ – полиномы.}$$

## 7. Синтез регуляторов

- Выберем произвольный *устойчивый* полином  $f(s)$ , степень которого равна наибольшей из степеней  $n(s)$  и  $d(s)$ . Представим функцию  $P(s)$  в виде отношения рациональных функций

$$P(s) = \frac{U(s)}{V(s)}, \quad \text{где } U(s) = \frac{n(s)}{f(s)} \text{ и } V(s) = \frac{d(s)}{f(s)}.$$

- Можно показать, что существуют такие *правильные устойчивые* функции  $X(s)$  и  $Y(s)$ , для которых выполняется равенство

$$U(s)X(s) + V(s)Y(s) = 1. \quad (57)$$

- Тогда множество всех стабилизирующих регуляторов описывается формулой

$$C(s) = \frac{X(s) + V(s)Q(s)}{Y(s) - U(s)Q(s)}, \quad (58)$$

# 7. Синтез регуляторов

- где  $Q(s)$  – произвольная *правильная устойчивая* функция. Выражение (58) определяет *параметризацию множества стабилизирующих регуляторов* (параметризацию Юла) в общем случае, даже для неустойчивых объектов. Подставив (58) в формулу (54), получаем, учитывая (57),

$$W(s) = [X(s) + V(s)Q(s)]U(s)$$

- При синтезе можно выбирать *устойчивую правильную* функцию  $Q(s)$ , при которой передаточные функции замкнутой системы (по входу, по возмущению, по ошибке) имеют нужные свойства, а затем вычислять передаточную функцию регулятора, используя (58).

# 7. Синтез регуляторов

- Для примера рассмотрим снова неустойчивый объект с передаточной функцией

$$P(s) = \frac{1}{s-1}$$

- , которую можно записать в виде

$$P(s) = \frac{U(s)}{V(s)}, \quad \text{где } U(s) = \frac{1}{s+1}, \quad V(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

- Решением уравнения (57) может быть, например, такая пара устойчивых функций

$$X(s) = \frac{4}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{s+3}{s+1}.$$

- При выборе  $Q(s) = 1$  по формуле (58) получаем  $C(s) = \frac{s+3}{s+2}$ .
- Теперь в произведении  $C(s)P(s)$  нет никаких сокращений, система устойчива.

## 8. Дискретные системы

- Структурную схему системы автоматического управления (САУ) можно представить в следующем виде (рис. 1):



Рис. 1.

- В состав устройства управления входят корректирующее и вычитающее устройства.
- В процессе разработки системы автоматического управления решаются две основные задачи:
- Синтез корректирующего устройства, результатом которого является передаточная функция корректирующего устройства;
- Техническая реализация корректирующего устройства.

## 8. Дискретные системы

- Рассмотрим вопросы технической реализации корректирующего устройства на примере пропорционального регулятора (рис. 2):

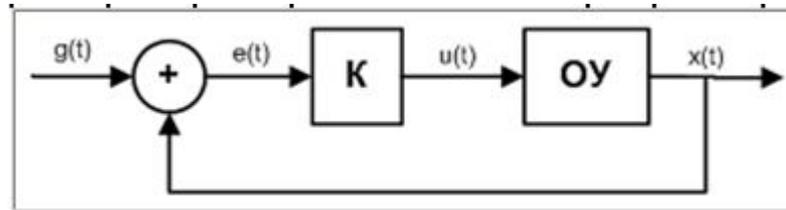


Рис. 2.

- Вариант 1.** Реализация в виде электронной схемы (например, на основе операционного усилителя, рис. 3). В этом случае значение управляющего сигнала может быть измерено в любой момент времени и с любой точностью. Системы, сигналы в которых существуют (могут быть измерены) в любой произвольный момент времени называются непрерывными системами.

# 8. Дискретные системы

## Операционный усилитель

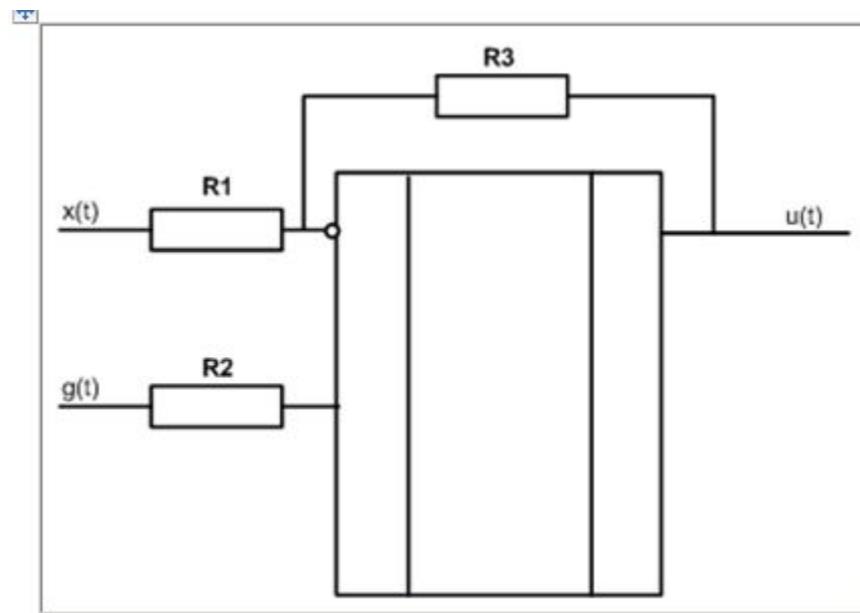


Рис. 3.

## 8. Дискретные системы

- **Вариант 2.** Реализация на основе специализированной ЭВМ (рис. 4):

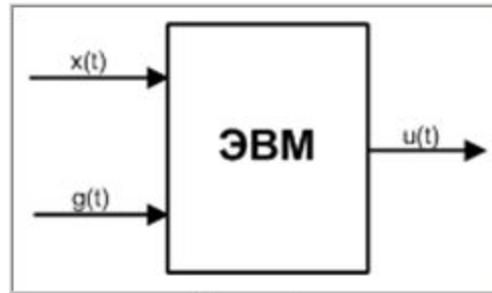


Рис. 4.

- В этом случае собственно корректирующее устройство реализуется программно в виде алгоритма расчета значения управляющего сигнала по известным значениям  $x(t)$  и  $g(t)$ . Блок-схема такого алгоритма выглядит следующим образом (рис. 5):

## 8. Дискретные системы



Рис. 5. Алгоритм работы корректирующего устройства

- Весь управляющий цикл состоит из ввода исходных данных для расчета, собственно расчета и вывода полученного значения управляющей величины. Работа алгоритма может быть представлена на временной оси (рис. 6):

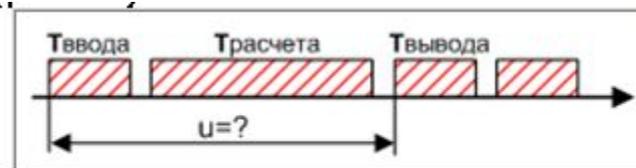


Рис. 6.