

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

ОТНОШЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 3

**Математический факультет. Кафедра математического
моделирования**

Тема: Отношения

Цель лекции – ознакомиться и овладеть понятиями «отношение», «алгебра отношений», изучить операции над отношениями для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Понятие n -местного отношения.
Совместимость отношений
- Операции над отношениями
- Реляционная алгебра
- Дополнительные операции над отношениями
- Пример применения отношений при составлении реляционной базы данных

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 9-12 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 8-12 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 12-21 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 21-23 с.

Термины

Базовые понятия:

- множество,
- подмножество,
- упорядоченная пара,
- вектор,
- декартово (прямое) произведение множеств

Ключевые слова:

- отношение,
- степень отношения,
- совместимость отношений,
- реляционная алгебра,
- операции над отношениями:
 - объединение,
 - пересечение,
 - разность,
 - расширенное декартово произведение,
 - выбор,
 - проекция,
 - соединение

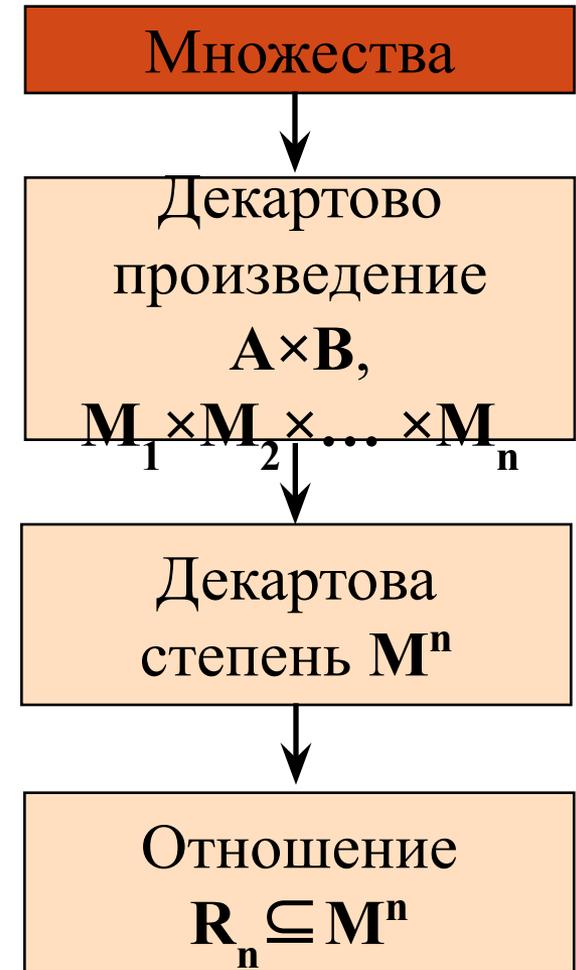


Определение отношения

- **Def:** **n**-местным отношением на множестве M называется подмножество декартовой степени множества M :

$$R_n \subseteq M^n$$

- Элементы x_1, x_2, \dots, x_n находятся в отношении, если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$
- n – степень отношения (-арность)
- $R \subseteq A^2$ – бинарное отношение;
- $R \subseteq A^3$ – тернарное отношение;
- $R \subseteq A^n$ – n -арное отношение
- **Совместимые** отношения – отношения одинаковых степеней





Операции над отношениями. 1

Для совместимых отношений $\alpha \subseteq A^n$, $\beta \subseteq B^n$ имеют место следующие операции:

| Название операции | Определение |
|-----------------------|--|
| Объединение отношений | $\alpha \cup \beta = \{v \mid v \in \alpha \text{ или } v \in \beta\}$ |
| Пересечение отношений | $\alpha \cap \beta = \{v \mid v \in \alpha \text{ и } v \in \beta\}$ |
| Разность отношений | $\alpha \setminus \beta = \{v \mid v \in \alpha \text{ и } v \notin \beta\}$ |

Операции над отношениями. 2



| Название операции | Определение |
|--|--|
| Дополнение $\bar{\beta}$ отношения β есть разность $\alpha \setminus \beta$, если $\alpha = A \times B$ – универсальное отношение | $\bar{\beta} = \alpha \setminus \beta = (A \times B) \setminus \beta$ |
| Расширенное декартово произведение $\alpha \times \beta$ (α и β могут быть несовместимыми) | $\alpha \times \beta = \{\pi = (k_\alpha, k_\beta) \mid k_\alpha \in \alpha, k_\beta \in \beta\}$ <p>π – конкатенация кортежа k_α с кортежем k_β</p> |

Пример 1

Для совместимых тернарных отношений $\alpha, \beta \subseteq M^3$

$$\alpha = \{(a, b, c), \mathbf{(a, b, d)}, (b, c, e)\}$$

$$\beta = \{\mathbf{(a, b, d)}, (b, d, e), (c, d, e)\}$$

операции объединения, пересечения и разности определяются как:

$$\alpha \cup \beta = \{(a, b, c), (a, b, d), (b, c, e), (b, d, e), (c, d, e)\};$$

$$\alpha \cap \beta = \{(a, b, d)\};$$

$$\alpha \setminus \beta = \{(a, b, c), (b, c, e)\}$$

Пример 2

Даны множества: $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$

- Составим их декартовы квадраты:

$$A^2=\{ (a,a), (a,b), (b,a), (b,b) \},$$

$$B^2=\{ (a,a), (a,c), (c,a), (c,c) \}$$

- Отношения задаются следующим образом:

$$\alpha=A \times B=\{ (a,a), (a,c), (b,a), (b,c) \}$$

$$\beta=\{ (a,c), (c,a) \} \subset B^2$$

- Дополнение отношения β есть :

$$\bar{\beta}=\alpha \setminus \beta=\{ (a,a), (b,a), (b,c) \}$$

Пример 3

Даны отношения $\alpha \subseteq A^2$, $\beta \subseteq A^3$

$$\alpha = \{ (a,b), (c,d), (a,e) \},$$

$$\beta = \{ (a,b,c), (b,d,e) \}$$

Расширенное декартово произведение отношений α и β определяется как

$$\alpha \times \beta = \{ (a,b,a,b,c), (a,b,b,d,e), (c,d,a,b,c), (c,d,b,d,e), (a,e,a,b,c), (a,e,b,d,e) \}$$

Алгебра отношений. 1



- Отношения в совокупности с операциями образуют **реляционную алгебру**.
- **Алгебра отношений** или **модель** (множество с заданным отношением) широко применяются при формализации реальных объектов, создании информационного обеспечения – разработке информационной базы данных
- Основой построения реляционной базы данных является двумерная таблица, каждый столбец которой соответствует домену (или атрибуту, являющемуся частью домена), строка – кортежу значений атрибутов, находящихся в отношении **R**

Алгебра отношений. 2



- Носитель реляционной алгебры представляет собой множество отношений
- Сигнатура, кроме введенных операций, включает **специальные операции** над отношениями:
 - **выбор,**
 - **проекция,**
 - **соединение**
- В соответствии с потребностями практики вводятся и другие операции:
 - **обмен позициями;**
 - **удвоение позиций;**
 - **свертка, композиция.**

Time Out

- Преподаватель (П) и студент (С):

П: Знаешь?

С: Знаю!

П: Что знаешь?

С: Предмет знаю.

П: Какой предмет?

С: Который сдаю.

П: А какой сдаешь?

**С: Ну, это Вы придираетесь.
Ваш, конечно!**



Пример специальных операций над отношениями. Постановка задания. 1

- Таблица определяет отношение реляционной модели данных:

$$R_5 =$$

| D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | D_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | b_2 | c_2 | f_3 | g_1 |
| a_2 | b_1 | c_3 | f_3 | g_2 |
| a_3 | b_3 | c_4 | f_3 | g_2 |
| a_4 | b_4 | c_3 | f_1 | g_1 |
| a_1 | b_3 | c_4 | f_2 | g_1 |
| a_2 | b_2 | c_2 | f_2 | g_2 |
| a_3 | b_4 | c_3 | f_4 | g_2 |
| a_4 | b_1 | c_2 | f_4 | g_1 |

The table is divided into two groups by brackets on the right: β for the first four rows and γ for the last four rows.

Пример специальных операций над отношениями. Постановка задания. 2

- Определить результаты выполнения следующих операций:
- α_1 – выбор по домену D_3 по значению атрибута c_2 ;
- α_2 – проекция по домену D_5 ;
- α_3 – проекция по доменам D_2, D_5 ;
- α_4 – соединение по домену D_1 по условию «равно» для двух таблиц β (первые четыре кортежа R_5) и γ (вторые четыре кортежа R_5).

Пример специальных операций над отношениями. Выбор. 1

- α_1 – выбор по домену D_3 по значению c_2 :

$$R_5 =$$

| D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | D_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | b_2 | c_2 | f_3 | g_1 |
| a_2 | b_1 | c_3 | f_3 | g_2 |
| a_3 | b_3 | c_4 | f_3 | g_2 |
| a_4 | b_4 | c_3 | f_1 | g_1 |
| a_1 | b_3 | c_4 | f_2 | g_1 |
| a_2 | b_2 | c_2 | f_2 | g_2 |
| a_3 | b_4 | c_3 | f_4 | g_2 |
| a_4 | b_1 | c_2 | f_4 | g_1 |

β (rows 1-4)
 γ (rows 5-8)

Пример специальных операций над отношениями. Выбор. 2

- Def:** операция выбора представляет собой процедуру построения «горизонтального» подмножества отношения, т.е. подмножества кортежей, обладающих заданным свойством
 $\alpha_1 = \{(a_1, b_2, c_2, f_3, g_1), (a_2, b_2, c_2, f_2, g_2), (a_4, b_1, c_2, f_4, g_1)\},$



Пример специальных операций над отношениями. Проекция. 1

■ **Def:** операция проекции определяет построение «вертикального» подмножества отношения или множества кортежей, получаемого выбором одних и исключением других доменов:



■ α_2 – проекция по домену D_5

$$\alpha_2 = \{g_1, g_2\}$$

■ α_3 – проекция по доменам D_2, D_5 :

$$\alpha_3 = \{(b_2, g_1), (b_1, g_2), (b_3, g_2), (b_4, g_1), (b_3, g_1), (b_2, g_2), (b_4, g_2), (b_1, g_1)\},$$

$R_5 =$

| D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | D_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | b_2 | c_2 | f_3 | g_1 |
| a_2 | b_1 | c_3 | f_3 | g_2 |
| a_3 | b_3 | c_4 | f_3 | g_2 |
| a_4 | b_4 | c_3 | f_1 | g_1 |
| a_1 | b_3 | c_4 | f_2 | g_1 |
| a_2 | b_2 | c_2 | f_2 | g_2 |
| a_3 | b_4 | c_3 | f_4 | g_2 |
| a_4 | b_1 | c_2 | f_4 | g_1 |

The table is annotated with brackets on the right side:

- A bracket labeled β spans the first four rows.
- A bracket labeled γ spans the last four rows.
- The cells containing g_1 and g_2 in the D_5 column are highlighted with a light red background.

Пример специальных операций над отношениями. Проекция. 2

- **Def:** проекцией $\text{Pr}(R_2/A)$ бинарного отношения $R_2 \subseteq A \times B$ на множество A называется множество элементов

$$\text{Pr}(R_2/A) = \{a_i \mid (a_i, b_i) \in R_2\}$$

- **Def:** проекцией $\text{Pr}(R_n/A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im})$ n -арного отношения $R_n \subseteq A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{in}$ на множества $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im}$ называется множество кортежей $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$, где $a_{ij} \in A_{ij}$, каждый из которых является частью n -арного отношения:

$$\text{Pr}(R_n/A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{im}) = \{(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}) \mid a_{ij} \in A_{ij}, j=1, 2, \dots, m\}$$

Пример специальных операций над отношениями. Соединение. 1

- α_4 – соединение по домену D_1 по условию «равно» для двух таблиц β (первые четыре кортежа R_5) и γ (вторые четыре кортежа R_5):

$$\alpha_4 = \{(a_1, b_2, c_2, f_3, g_1, b_3, c_4, f_2, g_1), (a_2, b_1, c_3, f_3, g_2, b_2, c_2, f_2, g_2), (a_3, b_3, c_4, f_3, g_2, b_4, c_3, f_4, g_2), (a_4, b_4, c_3, f_1, g_1, b_1, c_2, f_4, g_1)\}.$$

$R_5 =$

| D_1 | D_2 | D_3 | D_4 | D_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | b_2 | c_2 | f_3 | g_1 |
| a_2 | b_1 | c_3 | f_3 | g_2 |
| a_3 | b_3 | c_4 | f_3 | g_2 |
| a_4 | b_4 | c_3 | f_1 | g_1 |
| a_1 | b_3 | c_4 | f_2 | g_1 |
| a_2 | b_2 | c_2 | f_2 | g_2 |
| a_3 | b_4 | c_3 | f_4 | g_2 |
| a_4 | b_1 | c_2 | f_4 | g_1 |

β (rows 1-4)
 γ (rows 5-8)

Пример специальных операций над отношениями. Соединение. 2

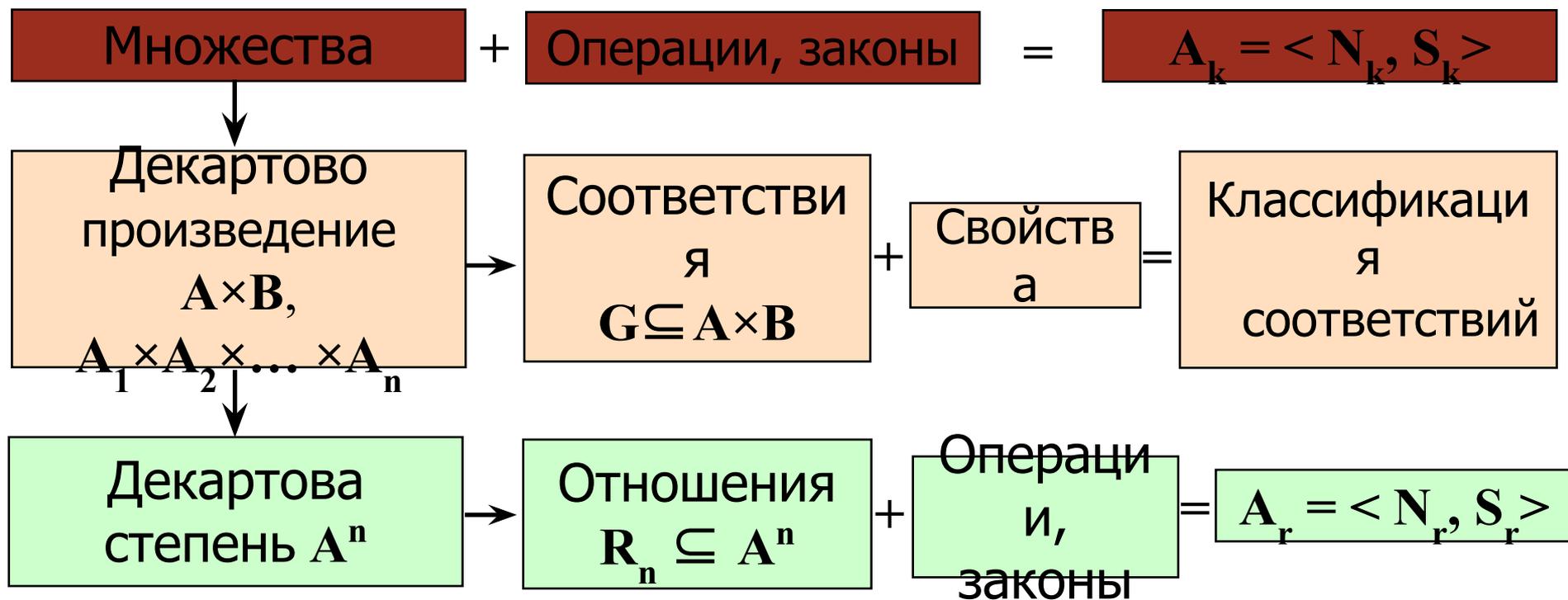


- **Def:** операция соединения по двум таблицам, имеющим общий домен, позволяет построить одну таблицу, каждая строка которой образуется соединением двух строк исходных таблиц. Из заданных таблиц выбираются строки, содержащие одно и то же значение из общего домена; общему домену сопоставляется один столбец

Выводы

- Реляционная алгебра замкнута относительно введенных операций
- Операция проецирования на один домен выводит из носителя, например, результат действия операции проекции по домену D_5 отношением не является
- Проекция на два и более домена является отношением степени два и более, соответственно
- Запрос в реляционной базе данных будет выполнен тем быстрее, чем меньше операций над отношениями он содержит

Выводы: схема взаимосвязей между понятиями



Тест-вопросы. 1

1. Отношением степени n называется:

- а) произвольное подмножество данного множества;
- б) подмножество декартова произведения двух множеств;
- в) подмножество декартова произведения любого конечного количества множеств;
- г) подмножество декартовой степени множества;
- д) результат объединения данных множеств;
- е) результат пересечения данных множеств.

2. Отношения являются совместимыми:

- а) всегда;
- б) если они имеют разные степени;
- в) если они имеют одинаковые степени;
- г) если они бинарные.

3. Операция выбора представляет собой построение:

- а) «горизонтального» подмножества отношения;
- б) «вертикального» подмножества отношения;
- в) «диагонального» подмножества отношения;
- г) «бинарного» подмножества отношения;

Тест-вопросы. 2

4. Операция проекции представляет собой построение:

- а) «горизонтального»
- б) «вертикального»
- в) «диагонального»

подмножества отношения.

5. Операция проекции по двум доменам представляет собой построение:

- а) «горизонтального» подмножества отношения;
- б) «вертикального» подмножества отношения;
- в) «диагонального» подмножества отношения;
- г) бинарного подмножества отношения.

6. Операция проекции по одному домену представляет собой построение:

- а) «горизонтального» подмножества отношения;
- б) «вертикального» подмножества отношения;
- в) «диагонального» подмножества отношения;
- г) бинарного подмножества отношения;
- д) некоторого отношения степени n ;
- е) множества элементов, не являющегося отношением.