Теория вероятностей

Введение

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Случайные события. Операции над событиями

Событие- явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. Событие- результат испытания.

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания(извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

Случайные события

Событие А называется благоприятствующим событию В , если появление события А влечет за собой появление события В.

События А и В называются не совместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени ; А-выбивание четного числа очков; В- не четного).

События А и В называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого(А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент)

Случайные события

Два события А и $\overline{A}$ называются противоположными, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого ($\overline{A}$ отрицание А).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется полной группой событий.

События называются равновозможными , если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (А-орел; В-решка).

Операции над событиями

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

А- извлечение черного шара

В- извлечение красного шара

С- извлечение белого шара

А+В – извлечен черный или красный шар

В+С – извлечен красный или белый шар

А+С – извлечен черный или белый шар

Операции над событиями

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

А- из колоды карт вынута ”дама”

В- вынута карта пиковой масти

$A \cdot B$ – событие – вынута карта “дама пик”

Классическая формула вероятности

Вероятность события- это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность P(A) наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A)=\frac{M}{N}$$

N – число всех исходов испытания

M – число исходов благоприятствующих событию A

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна 1

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{N}{N}=1$$

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{0}{N}=0$$

3) Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству $0\le P(A)\le 1$

1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар , какова вероятность что шар будет белым, черным ?

N=10; M=6; A- Извлечение белого шара $P(A)=\frac{6}{10}=0,6$

N=10; M=4; A- Извлечение черного шара $P(A)=\frac{4}{10}=0,4$

2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

A- черный; B- белый; C- красный; D- зеленый

N=10; M=2 $P(A)=\frac{2}{10}=0,2$

N=10; M=4 $P(B)=\frac{4}{10}=0,4$

N=10; M=4 $P(C)=\frac{4}{10}=0,4$

N=10; M=0 $P(D)=\frac{0}{10}=0$

Теорема сложения вероятностей

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n)$$

$$P(\sum_{i=1}^{n} Ai) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai)$$

Сумма вероятностей попарно несовместных $A_{1,} A_{2,} A_{3,} \cdots, A_{n,}$ событий, образующих полную группу , равна 1.

Теорема сложения вероятностей

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже наступило.

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$$

Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятность появления другого:

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{или} \quad P(B) = P_A(B)$$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность

Вероятность совместного наступления конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1A_2A_3\ldots A_n)=P(A_1)P_{A1}(A_2)P_{A1A2}(A_3)\ldots P_{A1A2A3\ldots An-1}(A_n);$$

$P_{A1A2A3\ldots An-1}(A_n)$ – вероятность появления события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$ произошли

$\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\ldots\,\overline{A}_n$

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1A_2A_3\ldots A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\ldots\,\overline{A}_n$

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P\ldots(\overline{A_n})$$

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий, равна сумме произведений вероятностей каждого из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ на соответствующую условную вероятность события А :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P_{H_i}(A)$$ - формула полной вероятности

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим события $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ которые образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них B_i событие A может наступать с некоторой условной вероятностью $P_{B_i}(A)$

Тогда вероятность наступления события A равна сумме произведений вероятностей каждого из событий на соответствующую условную вероятность события A

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

Сколько бы не было вероятностей:

$$P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$$

Формула полной вероятности.
Формула Байеса

Рассмотрим событие А которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий, B_1, B_2, B_3,…,B_n , которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло то вероятность событий может быть переоценена по формуле Байеса, формуле вероятности гипотез:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}$$

Формула Бернулли

Вероятность того что в n независимых испытаниях в каждом из которых вероятность появления события равна Р , Р(0<Р<1) , событие наступит К раз безразлично в какой последовательности, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_n(K) = C_n^{\kappa} \cdot p^{\kappa} \cdot q^{n-\kappa}$$

q=1-p ; q- вероятность противоположного события

или

$$P_n(K) = \frac{n!}{K!(n-K)!} \cdot p^{\kappa} \cdot q^{n-m}$$