Численное интегрирование

Введение

На практике достаточно большое число задач сводится к вычислению значения ***определенного интеграла*** некоторой функции, например, для установления площадей (рис. 1) или объемов различных фигур и тел, пути, пройденного точкой в условиях неравномерного движения, определения центров тяжести и инерции тел, работы произведенной некоторыми силами и т.д.

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале [a, b] и известна ее первообразная F(x), то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b можно вычислить ***по формуле Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F'(x) = f(x)$

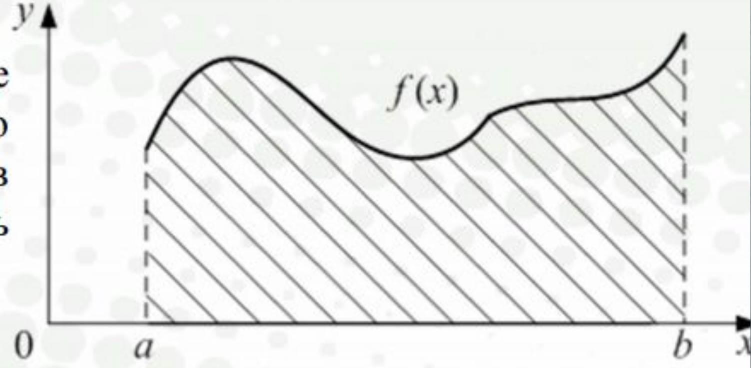

Рис. 1. Геометрическая интерпретация определенного интеграла

- Аналитическое решение таких задач, как правило, существует только для достаточно ограниченного числа подынтегральных функций f(x). В этом случае первообразную можно представить в виде комбинации алгебраических и трансцендентных функций.

- Достаточно часто первообразную F(x) невозможно выразить через элементарные функции. Кроме этого, функция f(x) может задаваться не в виде непрерывной функции, а в виде таблицы ее значений на фиксированном конечном множестве точек. В этом случае понятие первообразной теряет смысл, поэтому для вычисления интеграла применяют численные методы.

Численные методы

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения определенного интеграла с помощью некоторой приближенной формулы через известные значения подынтегральной функции $f(x)$ (иногда через значения ее производных) в заданных точках.

Методы вычисления однократных интегралов называются ***квадратурными***, кратных интегралов – ***кубатурными***.

В рамках такого подхода искомый интеграл заменяется линейной комбинацией (линейной функцией) значений подынтегральной функции $f(x_i)$ в (k+1) точках интервала [a, b]:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k} A_i f(x_i) + R}$$

A_i– весовые коэффициенты,
x_i – узловые точки,
R – погрешность квадратурной формулы.

Численные методы

Принцип построения квадратурных формул состоит в следующем. Подынтегральная функция $f(x)$ на интервале $[a, b]$ заменяется интерполирующей функцией достаточно простого вида (например, интерполяционным многочленом), от которой легко находится интеграл. Исходный интервал $[a, b]$ разделяется на $(k-1)$ интервалов с шагом:

$$\boxed{h = \frac{b-a}{k-1}}$$

На каждом из полученных интервалов $[x_i, x_{i+1}]$ строится интерполяционный многочлен. Искомый интеграл вычисляется как сумма k частичных интегралов:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)dx} \qquad (1)$$

Методы интегрирования

- Методы Ньютона-Котеса основаны на представлении функции φ(x) в выражении (1) полиномом различных степеней. К данному классу методов относятся методы прямоугольников, трапеций, Симпсона.
- Методы статистических испытаний (методы Монте-Карло) заключаются в выборе узлов сетки для квадратурного или кубатурного интегрирования на интервале [a, b] с помощью датчика случайных чисел. Конечный результат имеет вероятностный характер. Такие методы, как правило, применяются для вычисления кратных интегралов.
- Сплайновые методы основаны на представлении функции φ(x) в выражении (1) кусочным полиномом с условиями связи между отдельными полиномами посредством системы коэффициентов.
- Методы наивысшей алгебраической точности заключаются в оптимальной расстановке узлов сетки интегрирования на интервале [a, b] и выборе весовых коэффициентов при замене исходной подынтегральной функции интерполирующей функцией достаточно простого вида. К данному классу методов относятся методы Гаусса-Кристоффеля (вычисление несобственных интегралов), Маркова.

Метод прямоугольников

- Различают методы левых, правых и средних прямоугольников. Рис. 2 иллюстрирует интерпретацию применения соответствующих методов.

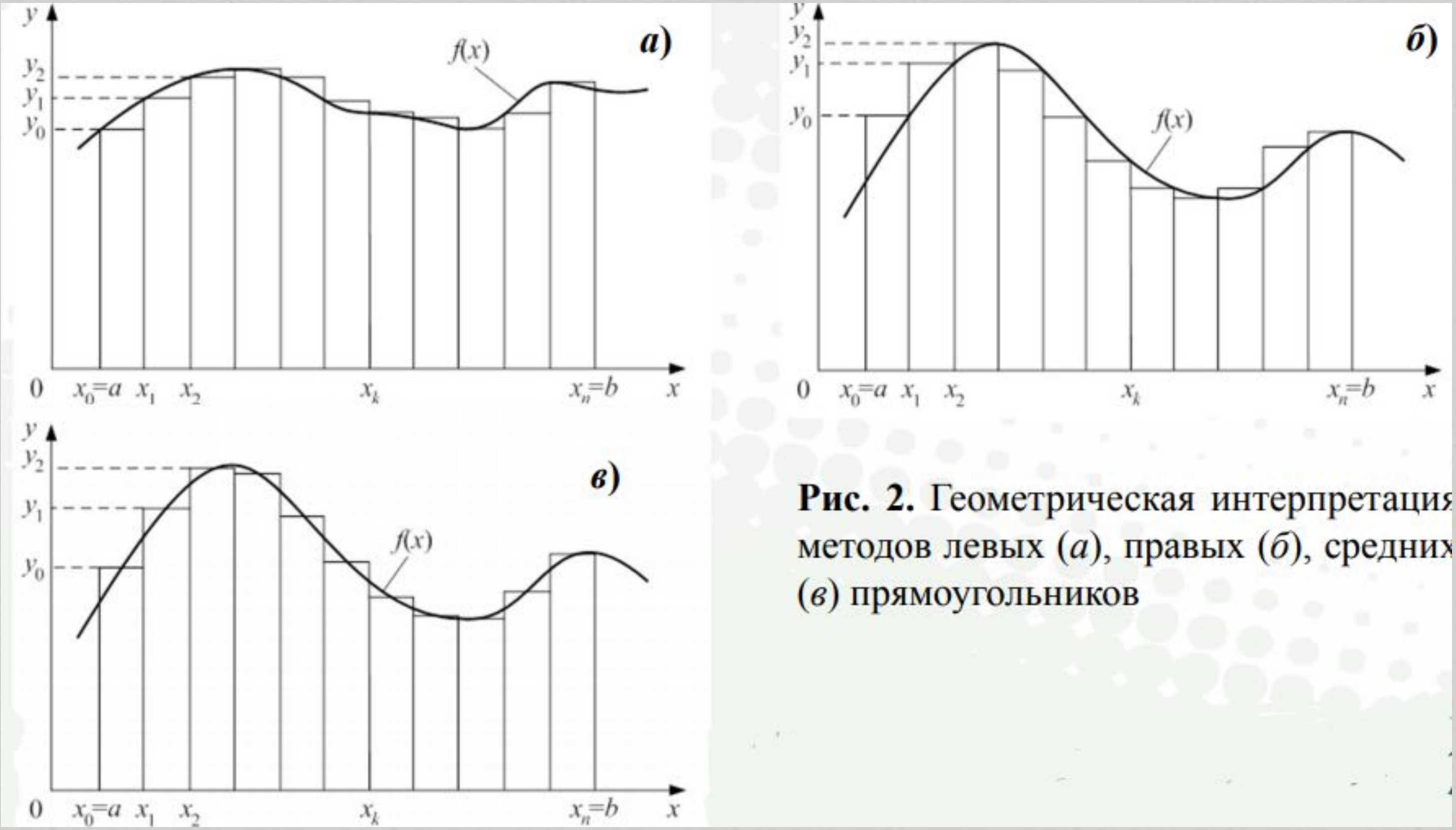

Рис. 2. Геометрическая интерпретация методов левых (*а*), правых (*б*), средних (*в*) прямоугольников

Метод прямоугольников

Интервал интегрирования разбивается на n равных частей точками x_k (k=0, 1, 2, … , n), $x_0=a$, $x_n=b$. Длина каждого отрезка $h=(b-a)/n$. На каждом шаге интегрирования исходная подынтегральная функция аппроксимируется **полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс.** Значения подынтегральной функции в узловых точках: $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, … , $y_n=f(x_n)$.

Кусочно-гладкая функция заменяется ступенчатой функцией, которая в пределах каждого элементарного отрезка принимает постоянное значение, равное, значению подынтегральной функции **на левом конце отрезка (метод левых прямоугольников), на правом конце отрезка (метод правых прямоугольников) и в середине отрезка (метод средних прямоугольников).** Геометрически это означает, что искомый интеграл приближенно вычисляется **как сумма площадей *n* элементарных прямоугольников** (рис. 2).

Метод прямоугольников

Выражения для вычисления интеграла в рамках методов:

левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)h + f(x_1)h + \ldots + f(x_{n-1})h = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_1)h + f(x_2)h + \ldots + f(x_n)h = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0 + h/2)h + f(x_1 + h/2)h + \ldots + f(x_{n-1} + h/2)h = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k + h/2)$$

Метод прямоугольников

Метод прямоугольников имеет **первый порядок точности.** Для непрерывно дифференцируемой функции погрешность убывает по линейному закону при уменьшении величины шага h.

Погрешность метода определяется выражением:

$$\boxed{R \le \frac{b-a}{2} h \max_{[a,\, b]} \left| f'(x) \right|}$$

Метод трапеций

- В отличие от метода прямоугольников аппроксимация подынтегральной функции осуществляется кусочно-линейной функцией (полиномом первой степени). В пределах каждого элементарного отрезка функция аппроксимируется прямой линией, проходящей через две соседние точки с координатами [xk, f(xk)] и [xk+1, f(xk+1)] (рис. 3). Это позволяет приближенно определить значение искомого интеграла, суммой площадей n элементарных трапеций.

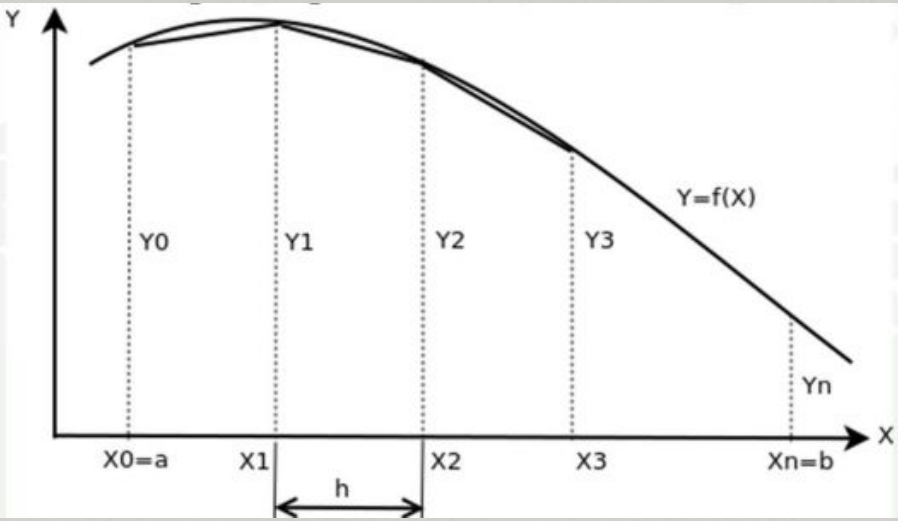

Рис. 3. Геометрическая интерпретация метода трапеций

Метод трапеций

- Выражения для вычисления интеграла в рамках метода трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = (f(x_0)+f(x_1))h/2 + (f(x_1)+f(x_2))h/2 + \ldots + (f(x_{n-1})+f(x_n))h/2 =$$

$$= h/2(f(x_0)+f(x_n)) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

Метод трапеций имеет **второй порядок точности.** Погрешность убывает по квадратичному закону при уменьшении величины шага h. **Погрешность метода** определяется выражением:

$$R \le \frac{b-a}{24} h^2 \max_{[a,\,b]} |f''(x)|$$

Метод Симпсона

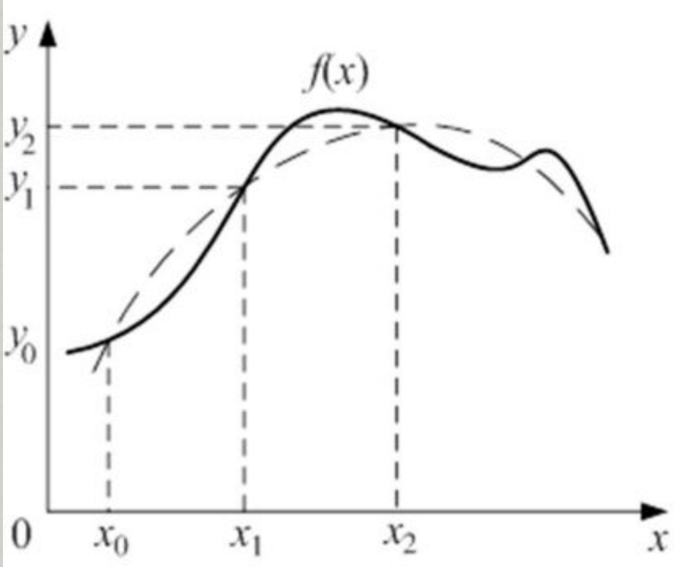

Рис. 4. Геометрическая интерпретация метода Симпсона

Метод Симпсона заключается в разбиении интервала интегрирования $[a, b]$ **на четное количество равных отрезков.** На каждых двух смежных элементарных отрезках $[x_k, x_{k+2}]$ подынтегральная функция заменяется интерполяционным полиномом второй степени или интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, проходящим через точки x_k, x_{k+1}, x_{k+2}. В пределах сдвоенного интервала $[x_k, x_{k+2}]$ подынтегральная функция **заменяется параболой,** проходящей через три соседние точки с координатами $[x_k, f(x_k)]$, $[x_{k+1}, f(x_{k+1})]$, $[x_{k+2}, f(x_{k+2})]$ (рис. 4).

Метод Симпсона

- Площадь исходной криволинейной трапеции заменяется суммой n площадей элементарных криволинейных трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Метод Симпсона имеет **четвертый порядок точности.**
Для функции, имеющей непрерывную четвертую производную, выражение для расчета **погрешности**:

$$R \le \frac{b-a}{180} h^4 \max_{[a,\, b]} \left| f''''(x) \right|$$

Примеры решения 15 задач численного интегрирования

В рамках рассмотренных методов численного интегрирования требуется вычислить интеграл:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,6931$$

Разобьем интервал интегрирования на 10 равных частей, т.е. n=10. Значения подынтегральной функции в узловых точках приведены в табл. 1.

Описание наиболее распространенных методов численного интегрирования

Табл. 1. Значения функции в узловых точках

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	1
1	0,1	0,9091
2	0,2	0,8333
3	0,3	0,7692
4	0,4	0,7143
5	0,5	0,6667
6	0,6	0,6250
7	0,7	0,5882
8	0,8	0,5556
9	0,9	0,5263
10	1	0,5

В соответствии с выражением для вычисления интеграла в рамках **метода левых прямоугольников:**

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1-0}{10}(1+0,9091+0,8333+0,7692+0,7143+$$

$$+0,6667+0,6250+0,5880+0,5556+0,5263) = 0,7188$$

В соответствии с выражением для вычисления интеграла в рамках **метода Симпсона:**

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{0,1}{3}(1+4\cdot 0,9091+2\cdot 0,8333+4\cdot 0,7692+2\cdot 0,7143+$$

$$+4\cdot 0,6667+2\cdot 0,6250+4\cdot 0,5880+2\cdot 0,5556+4\cdot 0,5263+0,5) = 0,6931$$

Спасибо за внимание