


ТРИ ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(ЧАСТЬ 6)

*Л. А. Янкина, канд. пед. наук,
доцент кафедры методики начального образования*



**Деление
целых
неотрицательных
чисел**

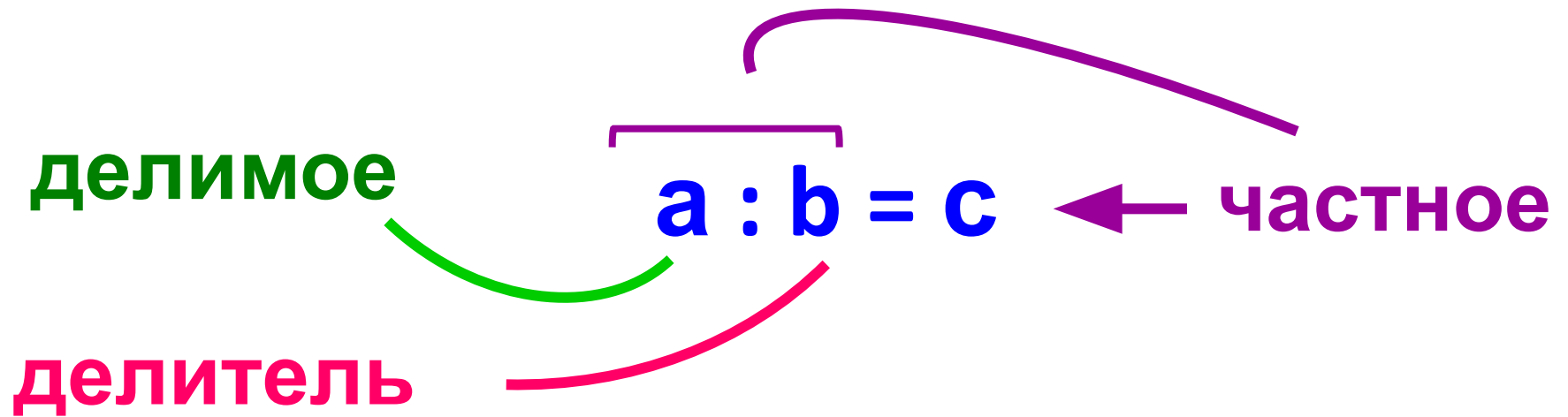
Аксиоматический подход

Частным натуральных чисел a и b называется натуральное число $c = a : b$, удовлетворяющее условию $b \cdot c = a$

$$c = a : b \Leftrightarrow b \cdot c = a$$

Действие, с помощью которого находится частное, называется **делением**.

Это действие обратное умножению



Примеры:

$$18 : 3 = 6, \text{ так как } 3 \cdot 6 = 18$$

$$35 : 5 = 7, \text{ так как } 5 \cdot 7 = 35$$

Теоретико-множественный подход

Выделяют два типа задач на деление.

Деление по содержанию

Множество M , состоящее из a элементов требуется разбить на попарно непересекающиеся подмножества так, чтобы в каждом подмножестве было b элементов. Найти число таких

подмножеств.

Определение 1. Если множество M ,

состоящее из a элементов, разбито на

попарно непересекающиеся подмножества

так, что в каждом подмножестве b

элементов, то число таких подмножеств

есть частное чисел a и b

Деление на части

Множество M , состоящее из a элементов, требуется разбить на b попарно непересекающихся равномоцных подмножества. Найти число элементов в каждом подмножестве.

Определение 2. Если множество M , состоящее из a элементов, разбито на b попарно непересекающихся равномоцных подмножества, то число элементов в каждом подмножестве есть частное чисел a и b

Действие, с помощью которого находится частное, называется **делением.**

Это действие обратное умножению

Пример: Объясните, почему следующие задачи решаются делением

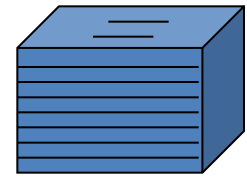
1) 12 тетрадей раздали 4 ученикам поровну. Сколько тетрадей получил каждый?

А – множество тетрадей, $n(A) = 12$

Множество А разбили на 4 равномощных непересекающихся подмножества:

$$A_1 \sim A_2 \sim A_3 \sim A_4, A_i \subset A, i = 1, \dots, 4 \quad n(A_i) = ?$$

Число элементов в каждом подмножестве – это частное чисел 12 и 4: $12 : 4 = 3$ (т.)



4



$$12 : 4 = 3$$

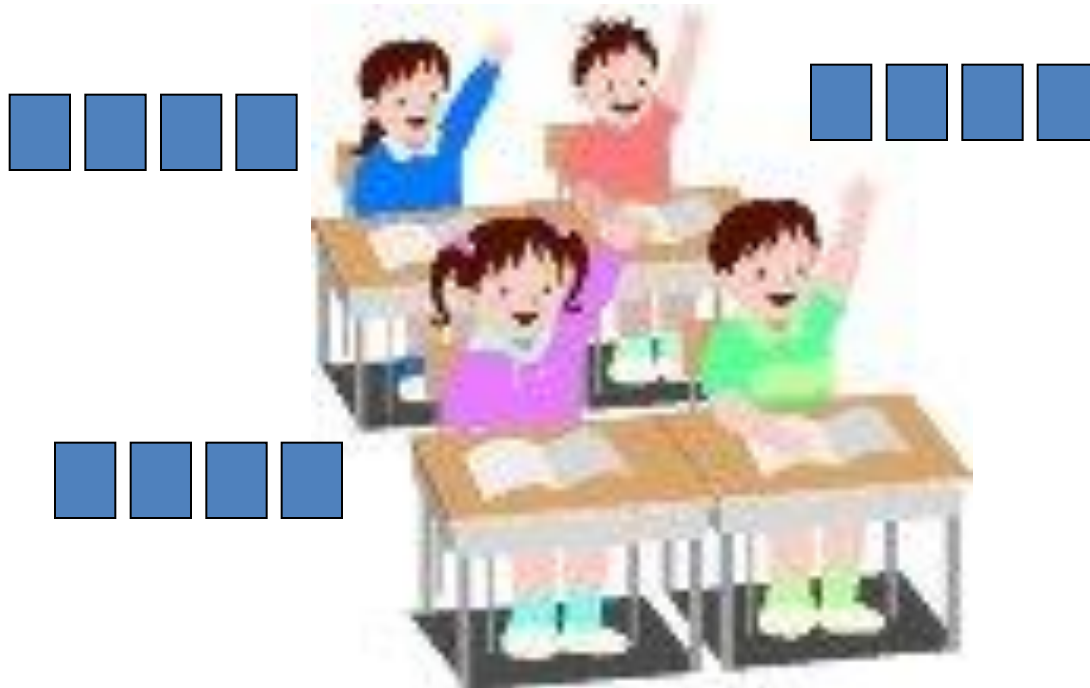
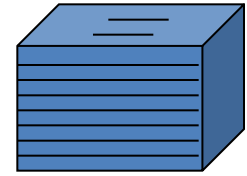
2) 12 тетрадей раздали ученикам по 4 тетради каждому. Сколько учеников получили тетради?

A – множество тетрадей, $n(A) = 12$

Множество **A** разбили на непересекающиеся подмножества по 4 элемента в каждом:

$$A_1 \sim A_2 \sim \dots, A_i \subset A, n(A_i) = 4, i = 1, \dots, ?$$

Число таких подмножеств – это частное чисел 12 и 4: $12 : 4 = 3$ (у.)

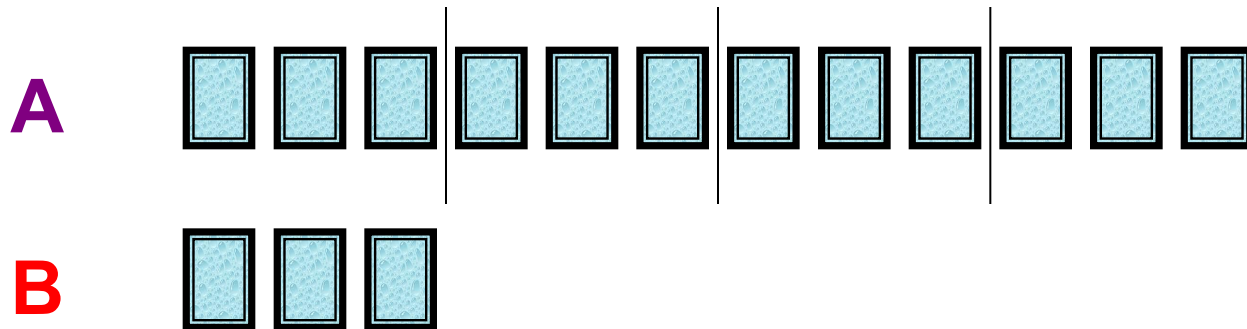


$$12 : 4 = 3$$

3) У Коли было 12 марок, а у Миши в 4 раза меньше. Сколько марок было у Миши?

А – множество марок Коли, $n(A) = 12$

В – множество марок Миши, $n(B) = ?$



Множество **А** разбили на **4** равномощных непересекающихся подмножества. Множество **В** равномощно каждому такому подмножеству.

Число элементов в каждом подмножестве, т. е. число элементов в множестве **В** – это частное чисел 12 и 4:

$$12 : 4 = 3 \text{ (м.)}$$

4) У Коли было 12 марок, это в 4 раза больше, чем у Миши. Сколько марок было у Миши?

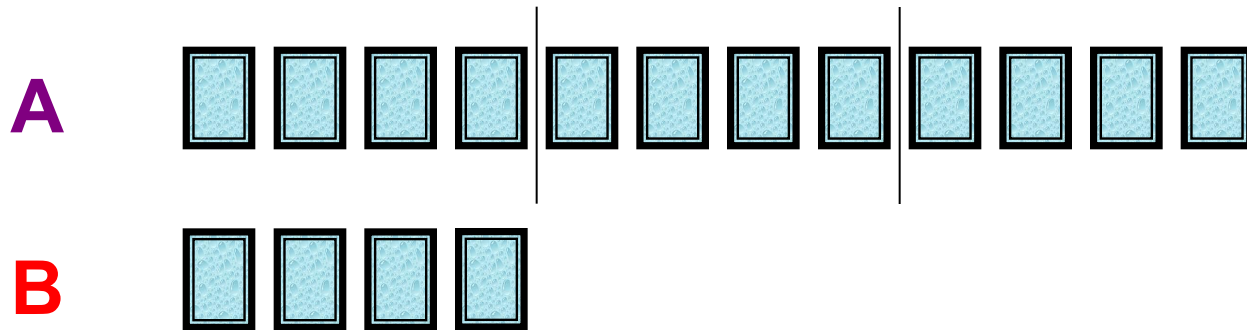
Переформулируем задачу:

**У Миши марок в 4 раза меньше, чем у
Коли \Rightarrow задача 3**

5) У Коли было 12 марок, а у Миши 4 марки. Во сколько раз у Коли марок больше, чем у Миши?

А – множество марок Коли, $n(A) = 12$

В – множество марок Миши, $n(B) = 4$



Множество **А** разбили на непересекающиеся подмножества, равномощные множеству **В**.

Число таких подмножеств – это частное чисел 12 и 4:

$$12 : 4 = 3 \text{ (р.)}$$

Натуральное число как результат измерения величин

a



e₁



$$m_{e_1}(a) = 12 \text{ или } a = 12 e_1$$

e₂



$$m_{e_2}(a) = 6 \text{ или } a = 6 e_2$$

$$e_2 = 2e_1$$

e₃



$$m_{e_3}(a) = 3 \text{ или } a = 3 e_3$$

$$e_3 = 4e_1$$

Если отрезок a состоит из p отрезков длины e , а отрезок e_1 состоит из q отрезков, равных e , то мера отрезка a при единице длины e_1 будет равна $p : q$

$$\begin{aligned} a = pe, e_1 = qe &\Rightarrow e = (1:q)e_1 \Rightarrow a \\ &= p \cdot (1:q)e_1 = (p:q)e_1 \end{aligned}$$

Деление натуральных чисел
отражает переход к новой (более
крупной) единице длины

Пример 1: Объяснить, почему следующая задача решается делением:

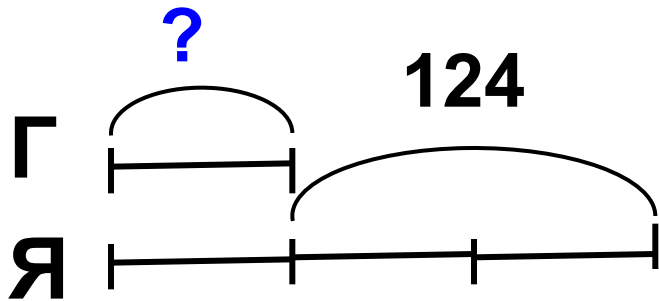
«12 кг варенья надо разложить в банки, по 3 кг в каждую. Сколько банок потребуется?»

a – масса варенья, e – 1 кг, e_1 – 1 банка

$$\begin{aligned} a = 12e, e_1 = 3e \Rightarrow e = (1:3)e_1 \quad a = \\ 12 \cdot (1:3)e_1 = (12:3)e_1 = 4e_1 \end{aligned}$$

$$12 : 3 = 4 \text{ (б.)}$$

Пример 2: Груш собрали на 124 килограмма меньше, чем яблок. Яблок собрали в 3 раза больше, чем груш. Сколько собрали груш?



1) $3 - 1 = 2$ (ч.) – приходится на 124 кг,

2) $124 : 2 = 62$ (кг) – груш собрали

Ответ: 62 кг.

Теорема о существовании и
единственности частного

Для того чтобы существовало частное чисел a и b необходимо, чтобы $b \leq a$:

$$\exists c = a : b \Rightarrow b \leq a$$

Если частное чисел a и b существует, то оно единственно

Свойства деления

Правило деления суммы на число

$$a \square c \wedge b \square c \Rightarrow (a + b) : c = a : c + b : c$$

Правило деления разности на число

$$a \square c \wedge b \square c \Rightarrow (a - b) : c = a : c - b : c$$

Правило деления произведения на число

$$a \square c \Rightarrow (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

$$b \square c \Rightarrow (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$$

Правило деления числа на произведение

$$a : (b \cdot c) = a : b : c$$

В курсе математики начальной

школы

1) Вычисли удобным способом:

$$\text{а) } 370 : 2 : 5 = 370 : (2 \cdot 5) = 370 : 10 = 37$$

правило деления
числа на произвед.

$$\text{б) } 376 : 4 = 376 : (2 \cdot 2) = 376 : 2 : 2 = 188 : 2 = 94$$

правило деления
числа на произвед.

$$\text{в) } 376 : 4 = (360 + 16) : 4 = 360 : 4 + 16 : 4 = 94$$

правило деления суммы на число

$$\text{г) } 376 : 4 = (400 - 24) : 4 = 400 : 4 - 24 : 4 = 94$$

правило деления разности на число

2) Какие числа нужно вставить в «окошки», чтобы получить верные равенства?

$$(18 + \square) : 3 = \square + 24 : 3$$

$$(\square - \square) : 5 = 9 - 7$$

3) Запиши цифры в «окошки», чтобы получились верные равенства?

$$(3\square + 3\square) : \square = 7 + 6$$

$$(3\square - 2\square) : 4 = \square - \square$$

4) Реши задачу разными способами. Какой закон (правило) является обобщением различных способов решения задачи?

а) В упаковке 36 штук витаминов. В день можно принимать 2 штуки. На сколько дней хватит 3 упаковки витаминов?

1 способ

$$(36 \cdot 3) : 2 = 108 : 2 = 54 \text{ (д.)}$$

2 способ

$$(36 : 2) \cdot 3 = 18 \cdot 3 = 54 \text{ (д.)}$$

$$(36 \cdot 3) : 2 = (36 : 2) \cdot 3$$

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$$

б) Магазин продал 17 лотков хлеба и выручил 8500 руб. Сколько стоит один батон, если в лотке помещается 20 батонов?

1 способ

$$8500 : (20 \cdot 17) = 8500 : 340 = 25 \text{ (руб.)}$$

2 способ

$$(8500 : 17) : 20 = 500 : 20 = 25 \text{ (руб.)}$$

$$8500 : (20 \cdot 17) = (8500 : 17) : 20$$

$$a \cdot b = b \cdot a \quad a : (b \cdot c) = (a : b) \cdot c$$



Деление с остатком

Разделить с остатком натуральное число **a** на натуральное число **b** – значит найти такие целые неотрицательные числа **q** и **r**, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$

неполное
частное

делимое

делитель

остаток

$$a = b \cdot q + r$$

The diagram illustrates the equation $a = b \cdot q + r$. A purple arrow points from the text 'неполное частное' to the variable q . A green arc connects the label 'делимое' to the variable a . A red arc connects the label 'делитель' to the variable b . A dark green arc connects the label 'остаток' to the variable r .

Теорема

Для любых двух натуральных чисел a и b существуют целые неотрицательные числа q и r , такие, что $a = bq + r$, причем $0 \leq r < b$.

Другой пары целых неотрицательных чисел (q, r) с тем же свойством не существует

В курсе математики начальной

школы

- 1) Выполни деление с остатком и проверь:

$$85 : 15$$

$$85 : 15 = 5 \text{ (ост. 10)}$$

Проверка: $10 < 15, 15 \cdot 5 + 10 = 85$

- 2) Запиши три числа, при делении которых на 7 в остатке получится 5; 3.

$$a = 7 \cdot q + 5$$

$$a = 7 \cdot q + 3$$

3) Выйдет ли квадратная проволочная рамка со стороной 7 см из треугольной рамки, каждая сторона которой равна 9 см?

1) $9 \cdot 3 = 27$ (см) – периметр треугольной рамки

2) $7 \cdot 4 = 28$ (см) – периметр квадратной рамки

3) $27 < 28$ – квадратной рамки не выйдет

4) Вставь в «окошки» пропущенные числа:

а) $88 : 26 = 3$ (ост. \square) б) $\square : 15 = 6$ (ост. 8)

в) $35 : \square = 4$ (ост. 3)

а) $88 - 26 \cdot 3 = 10$

б) $15 \cdot 6 + 8 = 98$

в) $(35 - 3) : 4 = 8$

5) Двум ученикам нужно разделить одно и то же число: первому на 14, а второму на 17. У первого получилось в частном 20 и в остатке 9. Какой ответ получил второй?

$$a = b \cdot q + r$$

$$a = 14 \cdot 20 + 9 \Rightarrow a = 289 \Rightarrow$$

$$289 = 17 \cdot q + r \Rightarrow q = 17, r = 0$$



**Спасибо за
внимание!**