Тема. Вычисление собственных чисел и собственных векторов

Постановка задачи:

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

Квадратная матрица $n \times n$ имеет m различных собственных чисел λ_i и соответствующих им собственных векторов x_i кратности k_i,

$$\sum_{i=1}^{m} k_i = n,\ \ i = 1, 2, ..., n,\ \ 1 \le m \le n$$

Вычисление собственных чисел и векторов

Идея:

$$Ax_i - \lambda_i x_i = 0$$

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda_i E) = 0$$

$$\det\left(A - \lambda_i E\right) = D\left(\lambda_i\right) = a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 + \ldots + \lambda_i^n = 0,$$

или $D\left(\lambda_i\right) = \left(-1\right)^n \left[\lambda_i^n - \sigma_1\lambda_i^{n-1} + \sigma_2\lambda_i^{n-2} - \ldots + \left(-1\right)^n \sigma_n\right],$

где σ_i – сумма всех диагональных миноров порядка i.

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Матрица Фробениуса:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $D(\lambda_i) = \det(P - \lambda_i E) = (-1)^n[\lambda_i^n - p_1\lambda_i^{n-1} - p_2\lambda_i^{n-2} - \ldots - p_n]$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

Преобразование подобия:

$$P = S^{-1}AS$$

$$\det\left(P - \lambda_i E\right) = \det\left(A - \lambda_i E\right)$$

$$S = M_{n-1}M_{n-2}...M_1,\ \ S^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}...M_{n-1}^{-1}$$

$$A^{(k)} = M_{n-k}^{-1}A^{(k-1)}M_{n-k},\ \ k = 1, 2, ..., n-1,$$

$$A^{(0)} = A,\ \ P = A^{(n-1)}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$M_k: \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, \ \ i = 1, 2, ..., n, \ \ j = 1, 2, ..., n, \ \ i \neq k; \\ m_{kj} = -\dfrac{a_{k+1,j}^{(n-k-1)}}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}, \ \ j = 1, 2, ..., n, \ \ j \neq k; \\ m_{kk} = \dfrac{1}{a_{k+1,k}^{(n-k-1)}}. \end{cases}$$

$$M_k^{-1}: \begin{cases} m_{ij} = e_{ij}, \ \ i = 1, 2, ..., n, \ \ j = 1, 2, ..., n, \ \ i \neq k; \\ m_{kj} = a_{k+1,j}^{(n-k-1)}, \ \ j = 1, 2, ..., n. \end{cases}$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\tilde{A}^{(k)} = A^{(k-1)} M_{n-k}, \;\; A^{(k)} = M_{n-k}^{-1} \tilde{A}^{(k)}, \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$A^1, \tilde{A}^1 : \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a & a & a \\ a & a & \ldots & a & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & \ldots & a & a & a \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^2, \tilde{A}^2 : \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a & a & a \\ a & a & \ldots & a & a & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Вычисление собственных чисел методом Данилевского

$$\ldots, A^{n-1}, \tilde{A}^{n-1} = \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a & a & a \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = A^{n-1}$$

Вычисление собственных векторов

Имеем СЛАУ:

$$(A - \lambda_i E)x_i = 0,$$
$$\det(A - \lambda_i E) = 0$$

Вариант Данилевского:

$$(P - \lambda_i E)y_i = 0,$$
$$x_i = Sy_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Здесь y_i – собственный вектор матрицы *P*, x_i – собственный вектор матрицы *A*.

Вычисление собственных векторов

Собственный вектор матрицы *P*:

$$y_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^{n-1} \\ \lambda_i^{n-2} \\ \ldots \\ \lambda_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$n = 3$$

$$\left|A - \lambda E\right| = \left|P - \lambda E\right| = \left(-1\right)^3 \left[\lambda^3 - p_{11}\lambda^2 - p_{12}\lambda - p_{13}\right] = 0$$

$$P = S^{-1}AS = M_1^{-1}M_2^{-1}AM_2M_1$$

$$A^0 = A;\ \ A^i = M_{3-i}^{-1}A^{i-1}M_{3-i},\ \ i = 1, 2$$

$$y = \left(\lambda^2, \lambda, 1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$x = Sy = M_2M_1y$$

Пример

$$M_2 : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_{22} = \dfrac{1}{a_{32}^{(0)}}, \ \ m_{2j} = -\dfrac{a_{3j}^{(0)}}{a_{32}^{(0)}} \end{cases} \qquad M_2^{-1} : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_2 = a_3^{(0)} \end{cases}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \ \ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{6}{7} & -\dfrac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \ M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^1 = A^0 M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A^1 = M_2^{-1}\tilde{A}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$M_1 : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_{11} = \dfrac{1}{a_{21}^{(1)}}, \ m_{1j} = -\dfrac{a_{2j}^{(1)}}{a_{21}^{(1)}} \end{cases} \quad M_1^{-1} : \begin{cases} m_i = e_i \\ m_1 = a_2^{(1)} \end{cases}$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{11}{7} & \dfrac{3}{7} & 1 \\ \dfrac{32}{7} & \dfrac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{32} & -\dfrac{18}{32} & \dfrac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{32}{7} & \dfrac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A^1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} & \frac{3}{7} & 1 \\ \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{32}{7} & \frac{18}{7} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^2 = A^1 M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{11}{32} & \frac{42}{32} & \frac{21}{32} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = M_1^{-1} \tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

Пример

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \left|P - \lambda E\right| = (-1)^3 \left[\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3\right] = -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0$$

$$p(x-a)(x-b)(x-c) = p\left(x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc\right)$$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = -1$$

$$D(\lambda) = p(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)$$

Пример

$$\begin{array}{llllll} -\lambda^3 & +\lambda^2 & +5\lambda & +3 & & \underline{|\lambda+1} \\ -\lambda^3 & -\lambda^2 & & & & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ & 2\lambda^2 & +5\lambda & & & \\ & 2\lambda^2 & +2\lambda & & & \\ & & +3\lambda & +3 & & \\ & & +3\lambda & +3 & & \\ & & & +0 & & \end{array}$$

$$-\lambda^2+2\lambda+3=0$$

$$\lambda_2=-1,\ \ \lambda_3=3$$

$$D(\lambda)=-(\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

Пример

$$y=\left(\lambda^{2},\lambda,1\right)^{\mathrm{T}}$$

$$x=Sy=M_{2}M_{1}y$$

$$y_{1}=y_{2}=\left(\lambda_{1}^{2},\lambda_{1},1\right)=\left(\lambda_{2}^{2},\lambda_{2},1\right)=(1,-1,1)$$

$$y_{3}=\left(\lambda_{3}^{2},\lambda_{3},1\right)=(9,3,1)$$

$$S=M_{2}M_{1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{6}{7}&-\frac{1}{7}&1\\ 0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{7}{32}&-\frac{18}{32}&\frac{7}{32}\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{32}&-\frac{18}{32}&\frac{7}{32}\\ \frac{6}{32}&-\frac{20}{32}&\frac{38}{32}\\ 0&0&1\end{pmatrix}$$

Пример

$$x_1 = x_2 = Sy_1 = Sy_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & -\frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Sy_3 = \begin{pmatrix} \frac{7}{32} & -\frac{18}{32} & \frac{7}{32} \\ \frac{6}{32} & -\frac{20}{32} & \frac{38}{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$