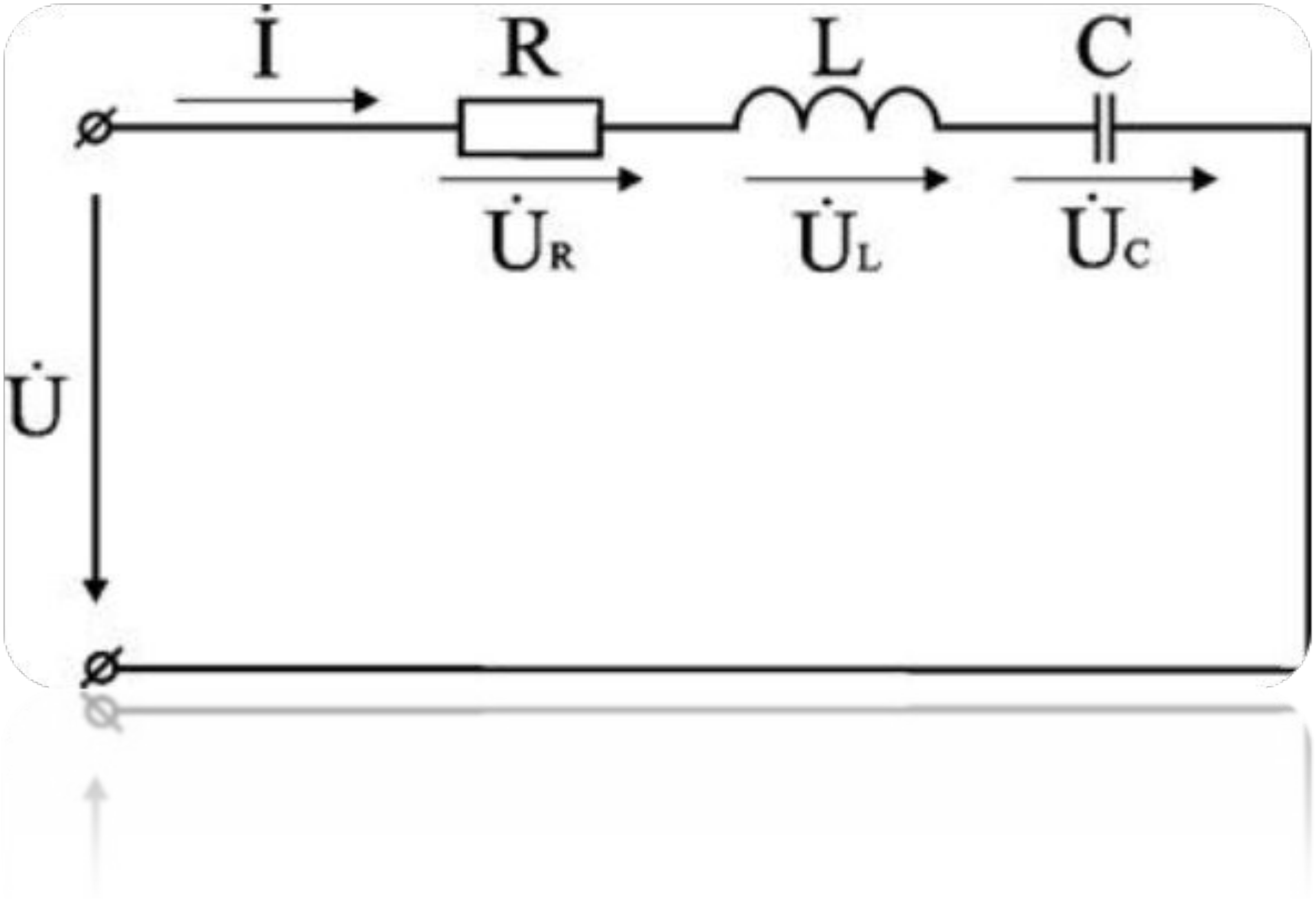
Анализ цепей переменного тока

Цепь с последовательным соединением элементов



Построение векторной диаграммы

Проведем анализ работы электрической цепи с последовательным соединением элементов: резистора R, идеальной катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C. Положим, что в этой задаче заданы величины R, L, C, частота f, напряжение U. Требуется определить ток в цепи и напряжение на элементах цепи.

Из свойства последовательного соединения следует, что ток во всех элементах цепи одинаковый.

Задача разбивается на ряд этапов.

1. Определение сопротивлений. Реактивные сопротивления идеальной катушки и конденсатора находим по формулам:

$$X_L = \omega L,\ X_C = 1 / \omega C,\ \omega = 2\pi f.$$

Полное сопротивление цепи равно

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

угол сдвига фаз равен $\varphi = \mathrm{arctg}((X_L - X_C) / R)$

2. Нахождение тока.

Ток в цепи находится по закону Ома для действующих значений тока и напряжения:

$$I = U / Z,\ \psi_i = \psi_u + \varphi.$$

Фазы тока и напряжения отличаются на угол φ.

3. Расчет напряжений на элементах.

Напряжения на элементах определяются по формулам, составленным согласно закона Ома для действующих значений тока и напряжения, для каждого элемента цепи

$$U_R = I\,R,\ \psi_{uR} = \psi_i\ ;$$

$$U_L = I\,X_L,\ \psi_{uL} = \psi_i + 90°\ ;$$

$$U_C = I\,X_C,\ \psi_{uC} = \psi_i - 90°.$$

Для напряжений выполняется второй закон Кирхгофа в векторной форме:

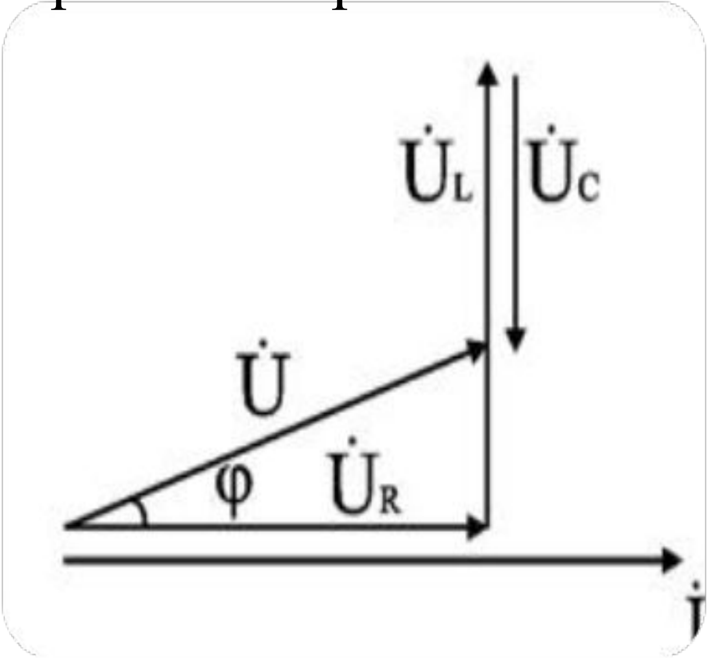
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

4. Анализ расчетных данных.

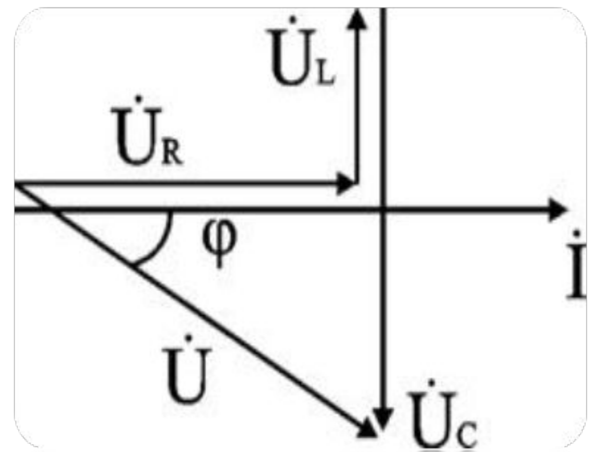
В зависимости от величин L и C в формуле расчета напряжений возможны следующие варианты:

$\mathbf{X_L > X_C;\ X_L < X_C;\ X_L = X_C.}$

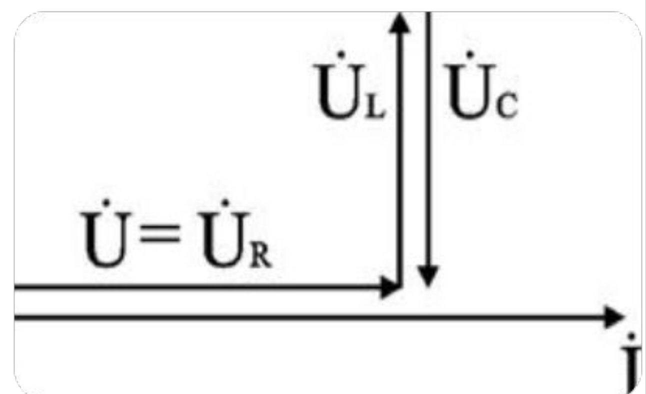
а) Для варианта $X_L > X_C$ угол $\varphi > 0$, $U_L > U_C$. Ток отстает от напряжения на угол φ. Цепь имеет активно-индуктивный характер. Векторная диаграмма напряжений имеет вид.



б) Для варианта $X_L < X_C$ угол $\varphi < 0$, $U_L < U_C$. Ток опережает напряжение на угол φ. Цепь имеет активно-емкостный характер. Векторная диаграмма напряжений имеет вид.



в) Для варианта $X_L = X_C$ угол $\varphi = 0$, $U_L = U_C$. Ток совпадает с напряжением. Цепь имеет активный характер. Полное сопротивление z=R наименьшее из всех возможных значений X_L и X_C. Векторная диаграмма напряжений имеет вид.



Этот режим называется резонанс напряжений ($U_L = U_C$). Напряжения на элементах U_L и U_C могут значительно превышать входное напряжение.

Пример

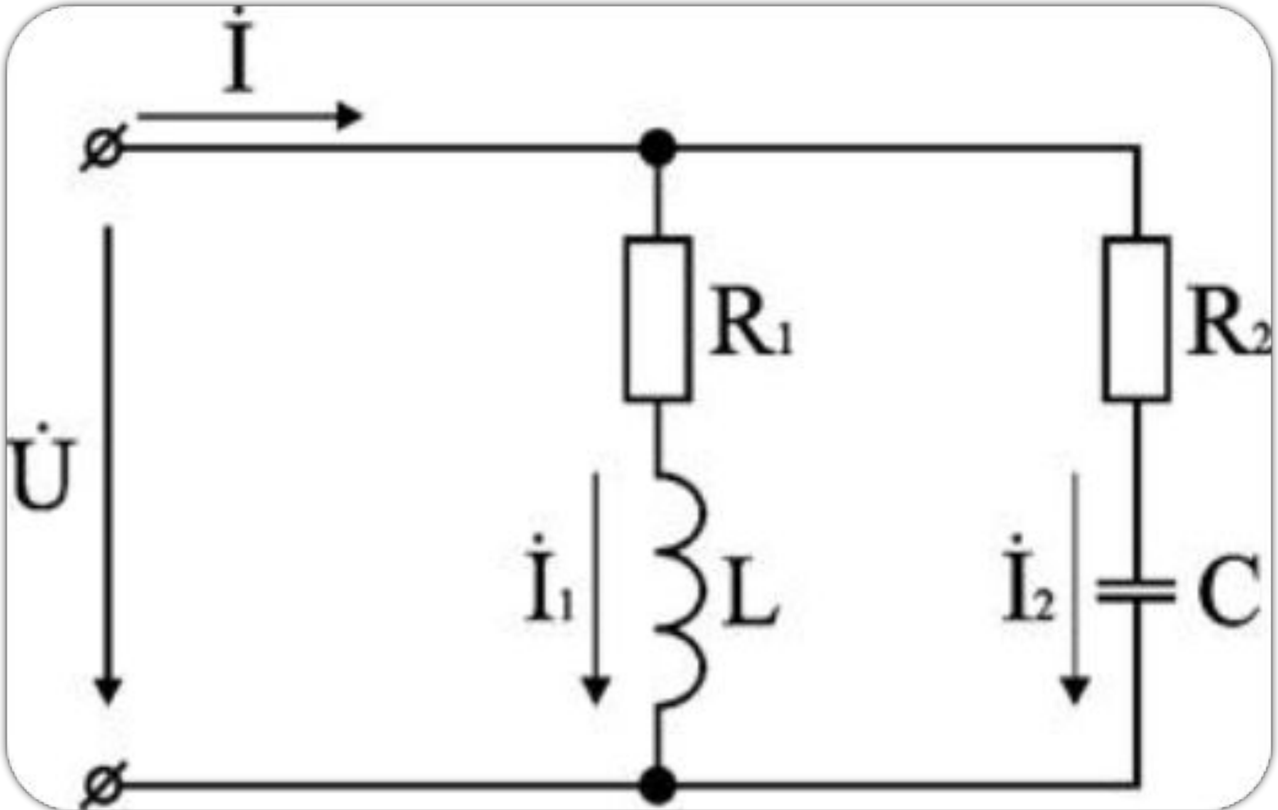
Дано: $U = 220$ В, $f = 50$ Гц, $R = 22$ Ом, $L = 350$ мГн,
$C = 28{,}9$ мкФ.

1. $X_L = \omega L = 2\pi f\, L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}35 = 110$ Ом;
$X_C = 1 / \omega C = 1 / (2\pi f\, C) = 110$ Ом;
$Z = R = 22$ Ом, $\varphi=0$,

2. $I = U / R = 220 / 22 = 10$ А, $\psi_u = \psi_i$;
$U_L = U_C = I\, X_L = 10 \cdot 110 = 1100$ В.

В приведенном примере U_L и U_C превышают входное напряжение в 5 раз.

Цепь с параллельным соединением элементов



Проведем анализ работы электрической цепи в состав которой входят параллельно соединенные резистор, реальная катушка с внутренним сопротивлением и конденсатор.

Положим, что заданы величины R_1, R_2, L, C, частота f и действующее значение входного напряжения U. Требуется определить токи в ветвях и ток всей цепи.

В данной схеме две ветви.

Согласно свойству параллельного соединения, напряжение на всех ветвях параллельной цепи одинаковое, если пренебречь сопротивлением подводящих проводов.

Задача разбивается на ряд этапов:

1. Определение сопротивлений ветвей.

Реактивные сопротивления катушки и конденсатора определяем по формулам

$$X_L = \omega L,\ X_C = 1 / \omega C,\ \omega = 2\pi f.$$

Полное сопротивление ветвей равны

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_L^2}, \qquad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_C^2},$$

соответствующие им углы сдвига фаз

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}(X_L / R_1),\ \varphi_2 = \mathrm{arctg}(X_C / R_2).$$

2. Нахождение токов в ветвях.

Токи в каждой ветви находятся по закону Ома для действующих значений тока и напряжений:

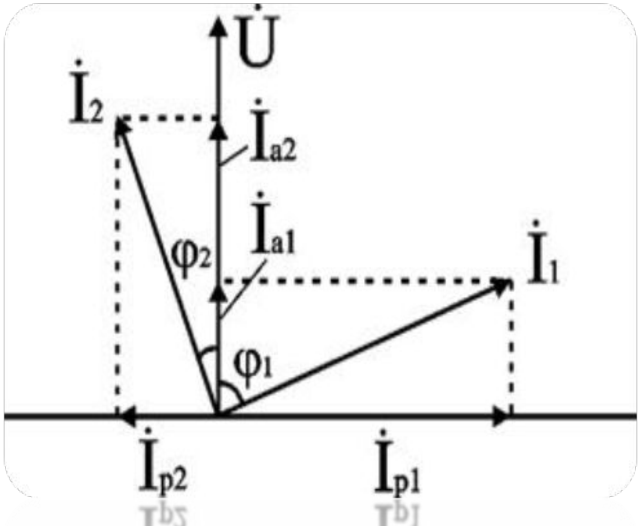
$$I_1 = U / Z_1,\ \psi_{i1} = \psi_u + \varphi_1,\ I_2 = U / Z_2,\ \psi_{i2} = \psi_u + \varphi_2.$$

3. Нахождение тока всей цепи.

Ток всей цепи может быть найден несколькими методами: *графическим, методом мощностей, методом проекций и методом проводимостей.*

Чаще всего используют *метод проекций* и *метод проводимостей*.

В *методе проекций* ток I_1 и I_2 раскладываются на две ортогональные составляющие - активную и реактивную. Ось активной составляющей совпадает с вектором напряжения U. Ось реактивной составляющей перпендикулярна вектору U.



Активные составляющие токов равны

$$I_{1a} = I_1 \cos \varphi_1,\ I_{2a} = I_2 \cos \varphi_2,$$

$$I_a = I_{1a} + I_{2a}.$$

Реактивные составляющие токов равны

$$I_{1p} = I_1 \sin \varphi_1,\ I_{2p} = I_2 \sin \varphi_2,$$

$$I_p = I_{1p} — I_{2p}.$$

В последнем уравнении взят знак минус, поскольку составляющие I_{1p} (индуктивная) и I_{2p} (емкостная) направлены в разные стороны от оси U.

Полный ток находится

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$$

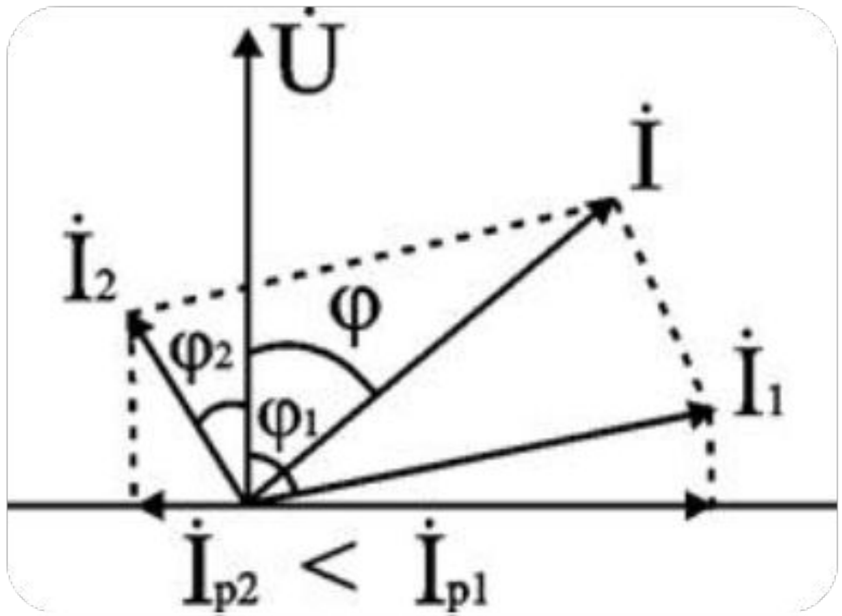
Угол сдвига фаз между током и напряжением во всей цепи

$$\varphi = \mathrm{arctg}(I_p / I_a).$$

4. Анализ расчетных данных.

В зависимости от соотношения реактивных проводимостей b_1 и b_2 возможны три варианта: $b_1 > b_2$; $b_1 < b_2$; $b_1 = b_2$.

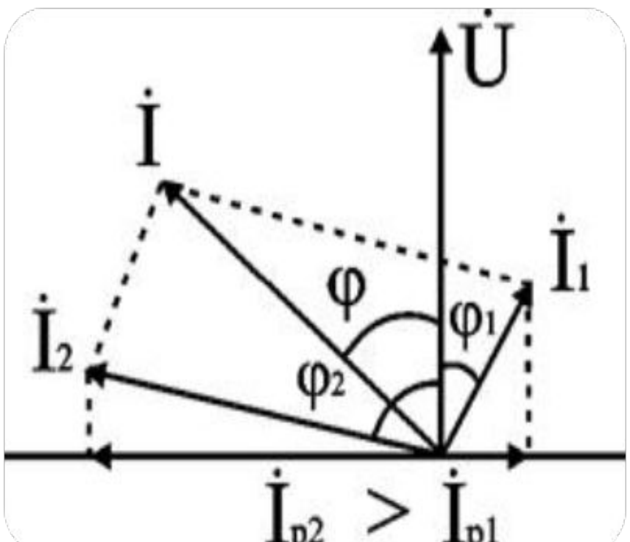
а) Для варианта $b_1 > b_2$ имеем $I_{1p} > I_{2p}$, $\varphi > 0$. Цепь имеет активно-индуктивный характер. Векторная диаграмма изображена на рисунке.

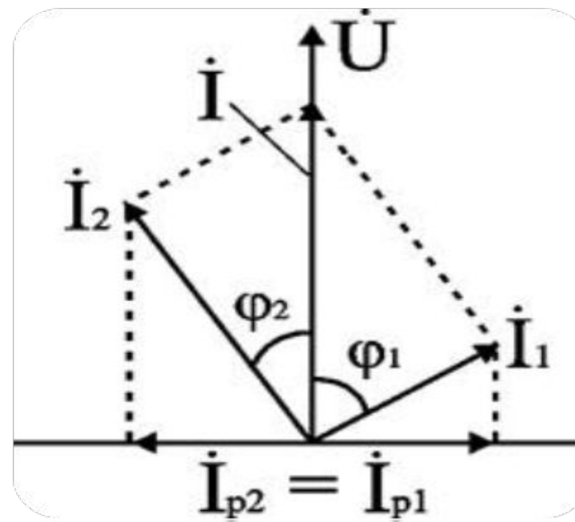


б) При $b_1 < b_2$ токи $I_{1р} < I_{2р}$, $\varphi < 0$. Цепь имеет активно-емкостный характер.

в) Если $b_1 = b_2$, то $I_{1р} = I_{2р}$, $\varphi = 0$. Цепь имеет чисто активное сопротивление. Ток потребляемый цепью от источника наименьший. Этот режим называется резонанс токов.

Векторные диаграммы изображены на рисунках.





Повышение коэффициента мощности в электрической цепи

Активная мощность потребителя определена формулой

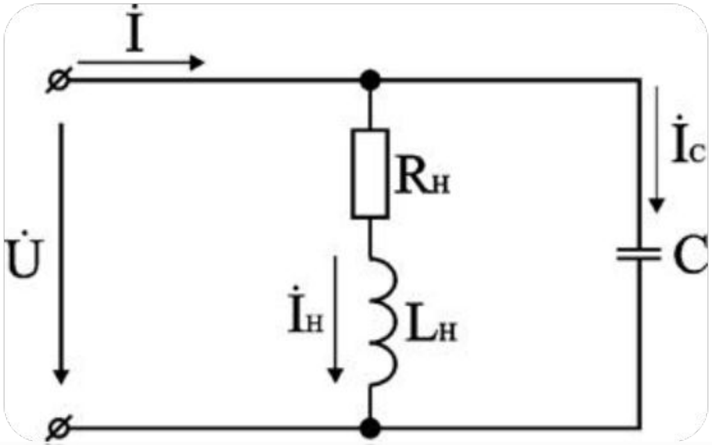
$$P = U\,I\cos\varphi.$$

Величину $\cos\varphi$ здесь называют **коэффициентом мощности**. Ток в линии питающей потребителя с заданной мощностью P равен

$$I = P / (U\cos\varphi),$$

и будет тем больше, чем меньше $\cos\varphi$.

При этом возрастают потери в питающей линии. Для их снижения желательно увеличивать $\cos\varphi$. Большинство потребителей имеет активно-индуктивную нагрузку. Увеличение $\cos\varphi$ возможно путем компенсации индуктивной составляющей тока путем подключения параллельно нагрузке конденсатора .



Расчет емкости дополнительного конденсатора для обеспечения заданного $\cos\varphi$ проводится следующим образом. Пусть известны параметры нагрузки $P_н$, U и $I_н$. Можно определить $\cos\varphi_н$

$$\cos\varphi_н = P / (U\ I_н).$$

Подключение емкости не изменяет активную составляющую нагрузки

$$I_{на} = I_н \cos\varphi_н = P_н / U.$$

Реактивная составляющая нагрузки $I_{нр}$ может быть выражена через $\mathrm{tg}\,\varphi_н$

$$I_{нр} = I_{на}\,\mathrm{tg}\,\varphi_н.$$

При подключении емкости величина $I_{нр}$ уменьшается на величину I_C.

Если задано, что коэффициент мощности в питающей линии должен быть равен $\cos\varphi$, то можно определить величину реактивной составляющей тока в линии

$$I_р = I_а\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Уменьшение реактивной составляющей нагрузки с $I_{нр}$ до $I_р$ определяет величину тока компенсирующей емкости

$$I_C = I_{нр} - I_р = I_а (\mathrm{tg}\,\varphi_н - \mathrm{tg}\,\varphi).$$

Подставляя в данное уравнение, значение $I_{на}$ и учитывая, что $I_C = U / X_C = U\,\omega C$, получим

$$U\,\omega C = P_н / U \cdot (\mathrm{tg}\,\varphi_н - \mathrm{tg}\,\varphi),$$

откуда для емкости конденсатора имеем

$$C = P_н / \omega U^2 \cdot (\mathrm{tg}\,\varphi_н - \mathrm{tg}\,\varphi).$$

Для больших значений $P_н$ величина емкости С может оказаться слишком большой, что технически трудно реализовать. В этом случае используют синхронные компенсирующие машины.

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Достоинство комплексного метода: при его применении в анализе цепей переменного тока можно применять все известные методы анализа постоянного тока.

Закон Ома

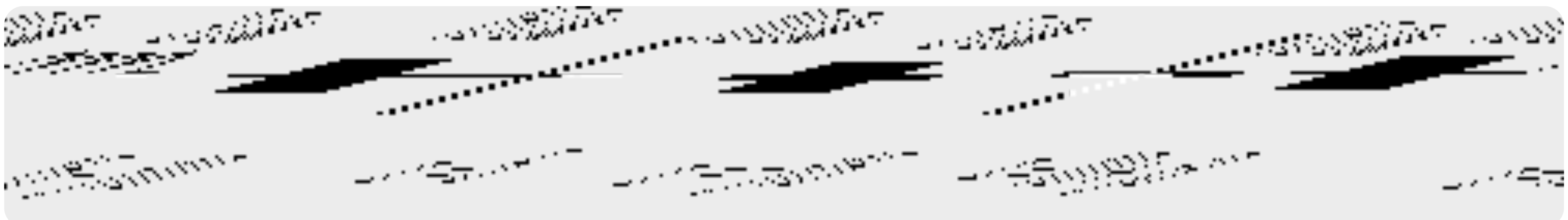
Под законом Ома в комплексной форме понимают:

Í = Ú / Z

Комплексное сопротивление участка цепи представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует величине активного сопротивления, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению.

$$\left.\begin{cases} \dot{I} = I \cdot e^{j\varphi_i} \\ \dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} \end{cases}\right\rangle \underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = r \pm jx$$

Примеры



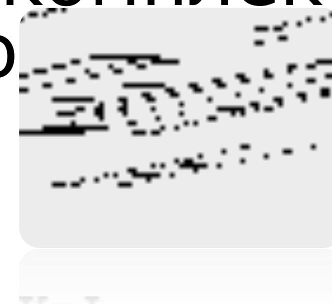
По виду записи комплексного сопротивления можно судить о характере участка цепи:

R + j X — активно-индуктивное сопротивление;

R – j X — активно-емкостное.

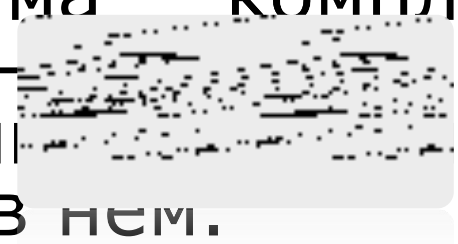
<u>Первый закон Кирхгофа в комплексной форме</u>

Алгебраическая сумма комплексных действующих значений то узле равна нулю.



<u>Второй закон Кирхгофа в комплексной форме</u>

В замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма комплексных действующих значен равна алгебраической сум ексных падений напряжений в нем.



При использовании символического метода можно пользоваться понятиями мощностей. Но в комплексной форме можно записать только полную мощность:

[illegible]

где Ï — комплексно-сопряженный ток.

Полная мощность в комплексной форме представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует активной мощности рассматриваемого участка, а коэффициент при мнимой части – реактивной мощности участка. Значение знака перед мнимой частью: “+” означает, что напряжение опережает ток, нагрузка – активно-индуктивная; “–” означает, что нагрузка - активно-емкостная.

$$S \cos \varphi \pm j\, S \sin \varphi = P \pm j\, Q$$