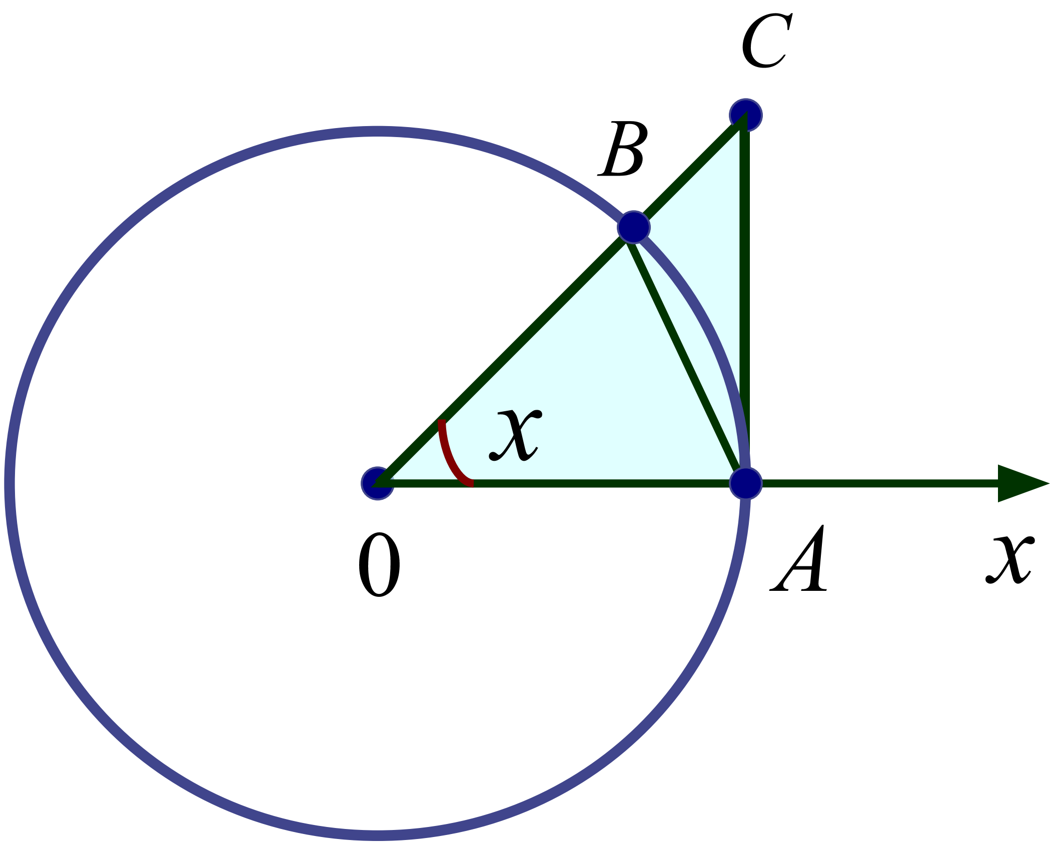
6.8. ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Рассмотрим круг радиуса *R* с центром в точке *O*. Пусть *OB* – подвижный радиус, образующий угол x с осью x, причем $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Из рисунка видно, что: $S_{\Delta AOB} < S_{секAOB} < S_{\Delta AOC}$

Найдем эти площади:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x$$

$$S_{секAOB} = \frac{1}{2}R^2 \cdot x$$

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot |AC| = \frac{1}{2}R^2 \cdot tgx$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx$$

или:

$$\sin x < x < tgx$$

Делим на $\sin x:$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Так как функции $\cos x$ *и* $\frac{\sin x}{x}$

четные, то полученные неравенства справедливы и при

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$

Переходим в полученном неравенстве к пределу при $x \to 0$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{1} < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \underbrace{\lim_{x\to 0} 1}_{1}$$

Следовательно, по признаку существования предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 6x}{4x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\cancel{4x}}\cdot\frac{\cancel{6x}}{6x}=$$

$$=\frac{3}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}_{1}=\frac{3}{2}$$

2

Вычислить

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$