Семинар 12. Исследование функций и построение графиков

Возрастание и убывание функции одной переменной

<u>Определение</u>

Функция *f(x)* возрастает на интервале *(a,b)*, если любому большему значению аргумента *x* в этом интервале соответствует большее значение функции, то есть, для

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Функция *f(x)* убывает на интервале *(a,b)*, если любому большему значению аргумента *x* в этом интервале соответствует меньшее значение функции, то есть, для

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

<u>Теорема 1</u> Необходимый признак возрастания (убывания) функции

Если дифференцируемая функция возрастает в некотором интервале, то производная этой функции неотрицательна в этом интервале

Если дифференцируемая функция убывает в некотором интервале, то производная этой функции неположительна в этом интервале

<u>Теорема 2</u> Достаточный признак возрастания (убывания) функции

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого интервала, то функции возрастает на этом интервале.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого интервала, то функции убывает на этом интервале.

Экстремум функции одной переменной

Определение

Функция *f(x)* имеет максимум $f(x_1)$ при значении x_1 аргумента *x*, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x_1) > f(x), (x \neq x_1)$

Аналогично

Функция *f(x)* имеет минимум при значении x_2 аргумента *x*, если в некоторой окрестности точки x_2 выполняется неравенство

1.Необходимое условие экстремума функции

Теорема

В точке экстремума функции (двустороннего) дифференцируемой функции ее производная равна нулю.

2.Достаточное условие экстремума

Теорема 1

Если производная функции *f(x)* равна нулю при $x = x_0$ и меняет знак при переходе через x_0 то x_0 - точка экстремума, причем

1) x_0 - точка максимума, если знак меняется с плюса на минус;

2) x_0 - точка минимума, если знак меняется с минуса на плюс

Направление выпуклости графика функции

Теорема

Если вторая производная функции положительна в некотором интервале, то ее график является выпуклым вниз, если вторая производная функции отрицательна, то ее график является выпуклым вверх в соответствующем интервале.

Точки перегиба графика функции

Точкой перегиба графика функции называется такая точка, при переходе через которую выпуклость меняется на вогнутость.

Теорема

Если при $x = x_0$ вторая производная функции *f(x)* равна 0 и меняет знак при переходе через эту точку, то данная точка есть точка перегиба графика функции.

Асимптоты графика функции

Прямую, определяемую уравнением *x=a*, называют вертикальной асимптотой графика функции *y=f(x),* если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке *a* является бесконечным. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$

Прямую, определяемую уравнением *y=kx+b* (1) называют невертикальной (наклонной) асимптотой графика функции *y=f(x),* если эта функция представима в виде

$f(x) = kx + b + \alpha(x)$ (2) где $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ (3)

Если график функции y=f(x) имеет невертикальную асимптоту (1), тогда существуют два предела $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$ (4)

Исследование функций и построение их графиков

Под исследованием функций понимают изучение их изменения в зависимости от изменения аргумента.

Исследование функций и построение их графиков проводят по схеме, приведенной ниже.

1.Нахождение области определения функции.

2.Изучение изменения функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения (находятся соответствующие односторонние пределы).

3.Нахождение промежутков возрастания и убывания функции, исследуя знак ее первой производной.

4.Нахождение точек экстремумов функции. Стационарные и критические точки. Исследование первой и второй производной. Вычисление экстремумов функции.

5.Нахождение промежутков выпуклости, вогнутости графика функции, точек перегиба.

6.Нахождение асимптот графика функции

7.Нахождение точек пересечения графика функции с осями координат. Решение систем уравнений

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Кроме того, учитывается четность и нечетность функции, ее периодичность.

Примеры с решениями

1. **Исследовать функцию на возрастание и убывание** $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Решение

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x) = 0; x_1 = -1; x_2 = 1$$

Эти значения разбивают ось OX на три интервала $(-\infty,1],[-1;1],[1,+\infty)$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,1] \cup [1,+\infty)$$ -функция возрастает

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1;1)$ -функция убывает

2. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x$

Решение $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1.$ поскольку *f'(x)>0* при *x<-1, f'(x)<0* при *-1<x<1, f'(x)>0* при *x>1*, то - точка максимума, - точка минимума

3. Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 18x + 8$

Решение $f'(x) = 3x^2 - 3x - 18 = 3(x^2 - x - 6) =$ 3(x+2)(x-3)=0 $\Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 3$

f''(x)=6x-3; f''(-2)=-15<0, тогда - точка максимума

f''(x)=15>0, тогда - точка минимума.

4. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Решение

$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

***f''(x)>0*, при *x>1* – выпуклость вниз, *f''(x)<0*, при *x<1* – выпуклость вверх**

5. Найти точку перегиба графика функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

Решение

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 0; \Rightarrow x = 2$

При *x<2 f''(x)<0*; при *x>2 f''(x)>0*. Следовательно, *M(2,6)* – точка перегиба.

6. Исследовать функции и построить ее график $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Решение

1) ОДЗ: $x \in R$ функция общего вида

2) $x \to -\infty, f(x) \to -\infty; x \to +\infty, f(x) \to +\infty$

3) $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2 \Rightarrow (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ – возраст.;[0;2] - убыв.

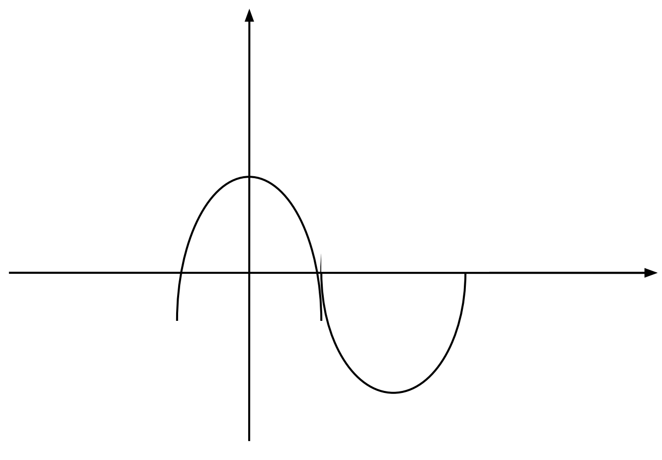
4) *f'(x)=0;* - точка максимума; $x_2 = 2$ - точка минимума;

5) Значения экстремумов *f(0)=2; f(2)=-2*

6)) *f''(x)=6x-6=6(x-1), x<1, f''(x)<0; x>1, f''(x)>0 - x=1* – точка перегиба

7) Асимптот нет.

8) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ $\Rightarrow x = 1; x = 1 + \sqrt{3}; x = 1 - \sqrt{3}$ - нули функции. *x=0,y=2*



Примеры для самостоятельного решения

Провести полное исследование функции и построить ее график

1) $y(x-1) = x^2$

2) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

3) $xy = (x^2 - 1)(x - 2)$

4) $y = \dfrac{x}{e^x}$

5) $y = \dfrac{e^x}{x}$

6) $y = \ln(x^2 + 1)$

7) $y = x^2 e^{-x^2}$

8) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$

9) $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

10) $y = x \sin x$

11) $y = \ln \cos x$

12) $y = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

13) $y = \ln(1+e^{x})$

14) $y = x\sqrt{x+3}$