Тема урока: Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на [a;b]

1. Найти критические точки функции на интервале (a; b);
2. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка, т. е. в точках $x = a$ и $x = b$,
3. Среди всех вычисленных значениях функции выбрать наибольшее и наименьшее

Наибольшее значение

$$\max_{[a;b]} f(x)$$

Наименьшее значение

$$\min_{[a;b]} f(x)$$

Выполнение этапов решения можно изменить, как вам удобно.

Этапы	Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке [0; 4]
1. Найти $f^{/}(x)$	1) $y^{/} = 3x^2 - 27$
2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.	2) $y^{/} = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(\overset{3}{x - 3})(\overset{-3}{x + 3})$ $x = 3 \in [0; 4]$ $x = -3 \notin [0; 4]$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	3) $y(0) = 0$ $y(4) = 4^3 - 27 \cdot 4 = -44$ $y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее	В 11 - 5 4

Задача:

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 2$ на отрезке $[-2;2]$.

Решение.

1. $D(f) = R$, значит функция непрерывна на рассматриваем отрезке.
2. Найдем критические точки функции: $f'(x) = x^2 + 2x - 3$

   $f'(x) = 0$, если $x^2 + 2x - 3 = 0$, отсюда $x = -3$ или $x = 1$.

   $x = -3$ не лежит на рассматриваем отрезке.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке.

   $$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 - 3\cdot(-2) - 2 = -\frac{8}{3} + 4 + 6 - 2 = 8 - 2\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3};$$

   $$f(1) = \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3\cdot 1 - 2 = \frac{1}{3} - 4 = -3\frac{2}{3};$$

   $$f(2) = \frac{2^3}{3} + 2^2 - 3\cdot 2 - 2 = 2\frac{3}{3} - 4 = 1\frac{1}{3}$$
4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее:

   $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 5\frac{1}{3}$ и $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -3\frac{2}{3}$

Ответ: $5\frac{1}{3}$ - наибольшее, а $-3\frac{2}{3}$ - наименьшее значения функции на отрезке [-2;2].

Решение:

1. $D(f)=R,$
2. Найдем критические точки функции: $f'(x)=3x^2-6x+3$, $f(x)=0$, если $3x^2-6x+3=0$. Отсюда, $x=1$.
3. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке, лежащей на этом отрезке :

   $f(-2)=-8-12-6+2=-24;$

   $f(1)=1-3+3+2=3;$

   $f(2)=8-12+6+2=4.$
4. Выберем из полученных значений наибольшее и наименьшее: $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(2)=4;$

   $\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-2)=-24.$

Самостоятельная работа

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

I в. $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$ на отрезке $[-1;4]$.

II в. $f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$ на отрезке $[-2;2]$.