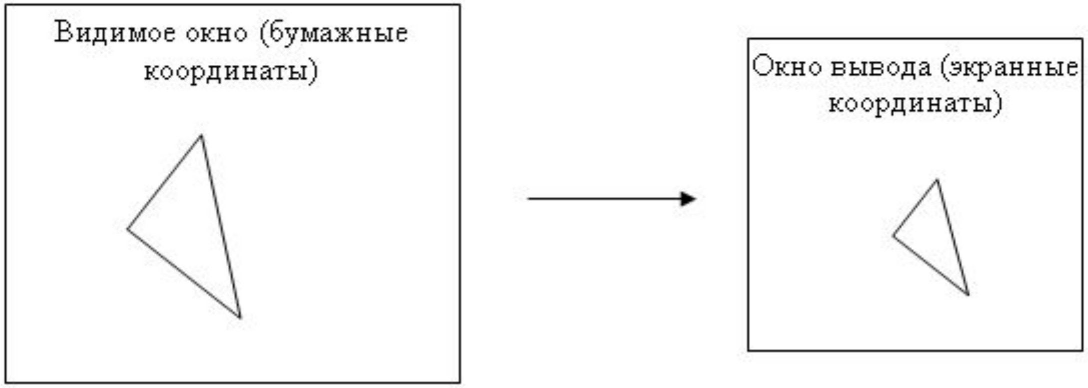
Изображение трехмерных объектов

Лекция 6

Двумерная графика

- Процесс вывода трехмерной графической информации более сложный, чем соответствующий двумерный процесс
- В двумерном случае просто задается *видимое окно* в двумерном мировом координатном пространстве и *окно вывода* на экране дисплея



Трехмерная графика

- В трехмерном случае объекты, описанные в мировых координатах, отсекаются по границе видимого объема, а после этого должны быть отображены в окне вывода на экране дисплея
- Сложность состоит в том, что экран дисплея не имеет третьего измерения
- Решение проблемы достигается путем введения проекций, которые отображают трехмерные объекты на двумерной проекционной *картинной плоскости* (КП)

Трехмерная графика

- В процессе вывода трехмерной графической информации задается *видимый объем* в мировом пространстве, его проекция на КП и окно вывода на экране дисплея
- В общем случае объекты, определенные в трехмерном мировом пространстве, отсекаются по границам трехмерного видимого объема и после этого проецируются
- При этом видимый объем преобразуется в видимое окно, которое затем отображается на экране дисплея

Формирование изображения 3D-объекта

Геометрические элементы в 3D-пространстве

- В двумерном пространстве, в частности на плоскости, являются точки и линии
- В трехмерном пространстве к ним добавляется новый вид геометрических объектов – *поверхности*
- Линии на плоскости могут быть *замкнутыми* и тогда ограниченная ими часть плоскости называется *фигурой* (например, эллипс или многоугольник)
- Аналогично, поверхности в 3D-пространстве могут быть замкнутыми и тогда ограниченная ими часть пространства называется *телом* (например, эллипсоид или многогранник)

Платоновы тела

- *Платоновыми телами* называются правильные многогранники, т.е. такие выпуклые многогранники, все грани которых суть правильные многоугольники и все многогранные углы при вершинах равны между собой
- Евклидом было доказано, что существует всего пять правильных многогранников

Доказательство

- Пусть к каждой вершине правильного многогранника примыкает m граней и каждая из них является правильным n-угольником
- Внутренний угол (угол правильного n-угольника) у каждой грани равен

$$\varphi_n = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

Доказательство

- Сумма внутренних углов, примыкающих к вершине, равна

$$m\varphi_n = m\frac{\pi(n-2)}{n}$$

- Поскольку телесный угол при вершине не является плоским, то отсюда следует неравенство

$$m\varphi_n < 2\pi$$

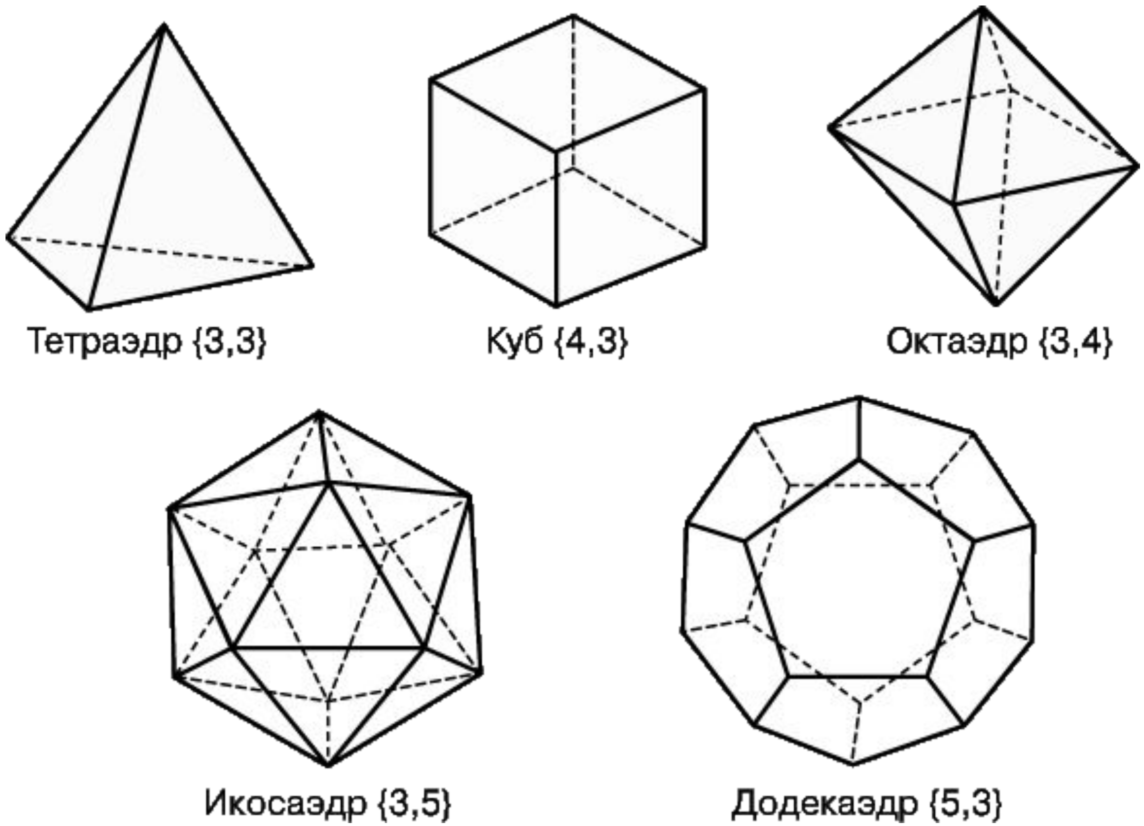
Доказательство

- В результате получаем систему неравенств:

$$m(n-2) < 2n,$$
$$m \geq 3,$$
$$n \geq 3.$$

- Эта система имеет 5 целочисленных решений, соответствующих пяти многогранникам, называемым *платоновыми телами*

Платоновы тела



Формула Эйлера

- Для каждого многогранника на предыдущем слайде указаны значения n и m
- Отметим, что для любого выпуклого многогранника (не только платонова тела) справедлива формула Эйлера:

$$G - E + V = 2,$$

где G– число граней, E – число ребер, V – число вершин

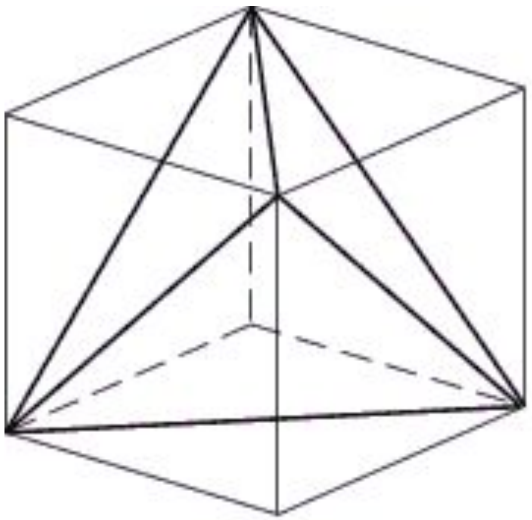
Построение гексаэдра (куба)

- Гексаэдр имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.
- Для построения этого тела можно использовать следующую матрицу (вершины 0, 1, 2, 3 – нижнее основание; вершины 4, 5, 6, 7 – верхнее основание)

	x	y	z	
0	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1
2	-1	-1	-1	1
3	1	-1	-1	1
4	1	1	1	1
5	-1	1	1	1
6	-1	1	-1	1
7	1	1	-1	1

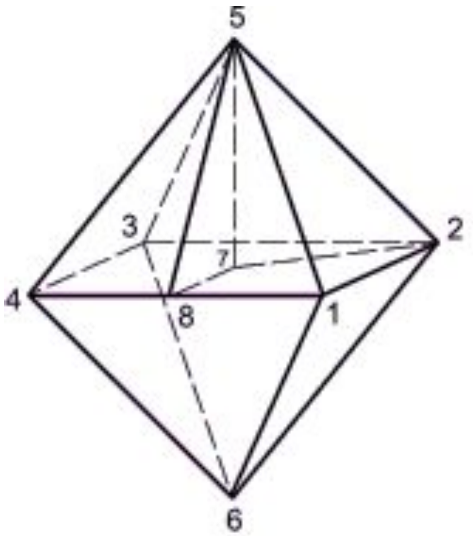
Построение тетраэдра

- Тетраэдр имеет 4 грани, 6 ребер и 4 вершины
- Простейший способ построения тетраэдра заключается в использовании куба в качестве вспомогательного тела, как показано на рисунке



Построение октаэдра

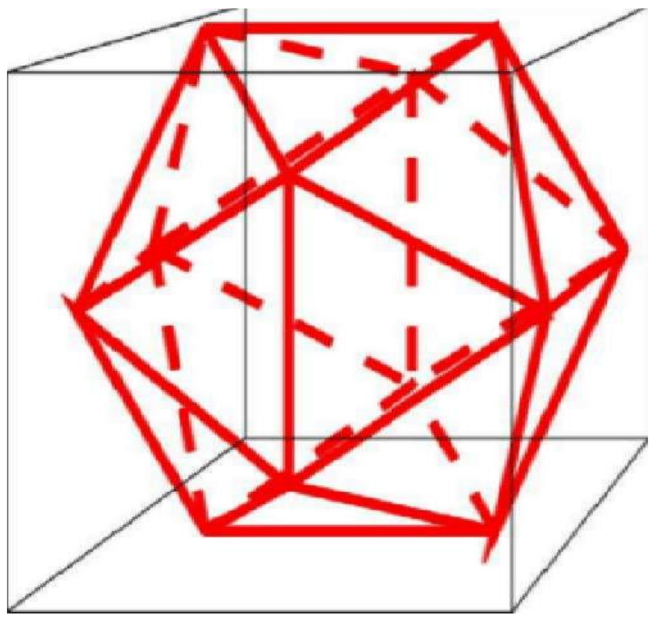
- Октаэдр имеет 8 граней, 12 ребер и 6 вершин и не может быть непосредственно вписан в куб.
- Алгоритм его построения достаточно прост и поясняется следующим рисунком

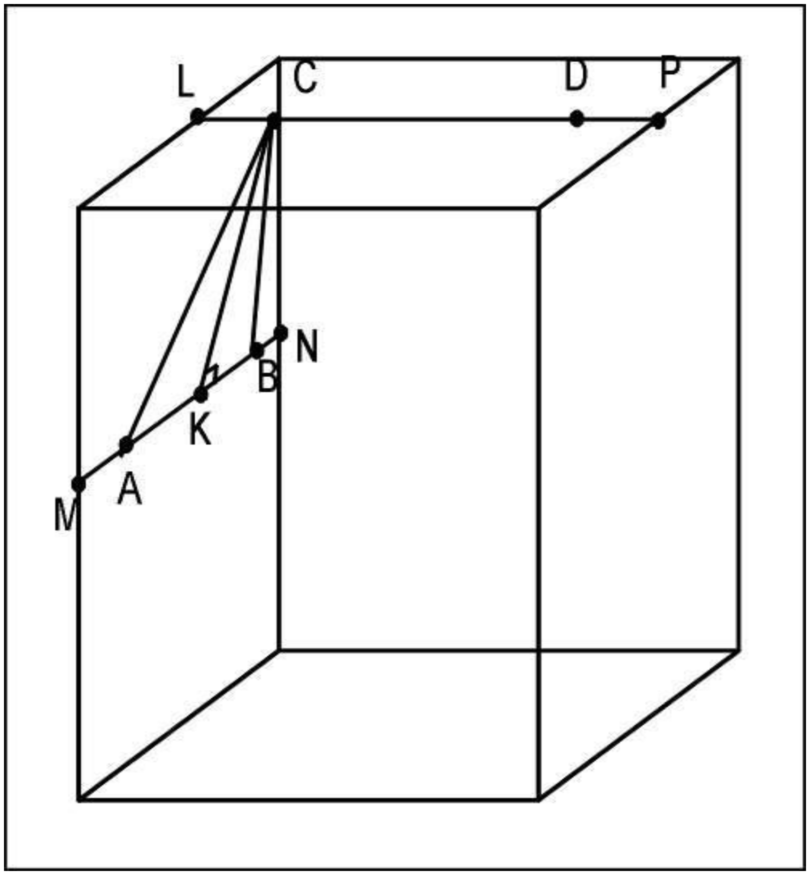


Построение октаэдра

- Как видно, две вершины октаэдра расположены по обе стороны квадрата
- Предположим, что стороны квадрата 1-2-3-4 имеют единичную длину. Точка 7 расположена в центре квадрата и также является центром октаэдра, а точка 8 находится посередине ребра 4-1
- Расстояние h между точками 5 и 7 легко найти рассматривая прямоугольный треугольник 1-5-7

Построение икосаэдра





Построение икосаэдра

- Пусть A, B, C, D —вершины икосаэдра; ребро куба равно 1, ребро икосаэдра равно x
- Обозначим: LC=y, тогда 1=x+2y, где 1 - ребро куба
- Рассмотрим CLK: CL=y, LK =1/2, тогда CK*CK= y*y +(1/4)
- Рассмотрим треугольник ABC — это грань икосаэдра: *CK* —высота, тогда *CK***CK*=3**x***x*/4.

Построение икосаэдра

- Получим систему

  $x+2*y=1$

  $4y*y - 3x*x =-1$

- Решив систему, получим два значения:

  $y1=(3+\sqrt{5})/4$ и $y2=(3 - \sqrt{5})/4$.

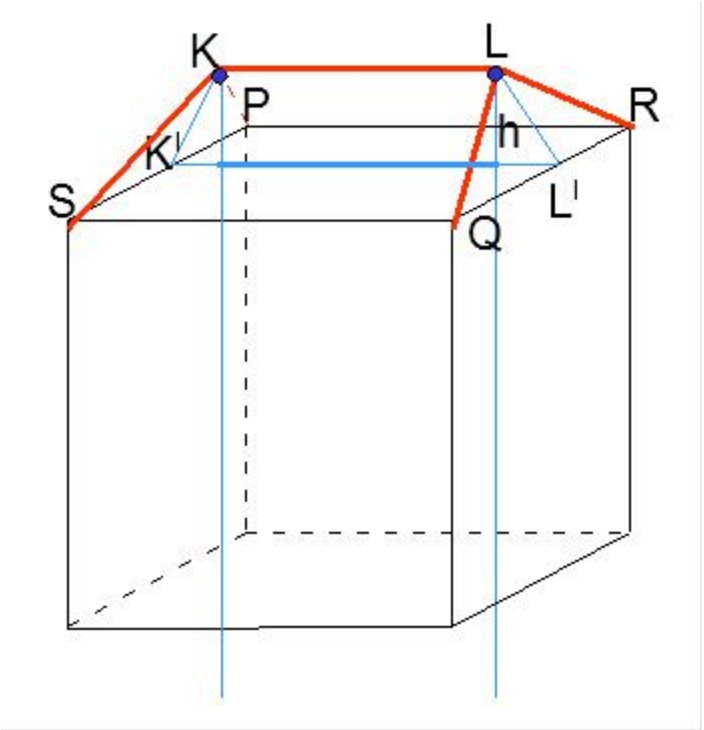
- Но $y1>1$, т.е. больше стороны куба; $y2\approx 0.19$ — есть искомое решение
- Итак, $y=(3-\sqrt{5})/4$

Построение додекаэдра

- Додекаэдр – это многогранник, имеющий 12 граней, 30 ребер и 20 вершин
- Для его построения необходимо выполнить следующие операции:
  - построить куб с длиной ребра a;
  - вычислить длину стороны m додекаэдра по формуле:
    $m = -a/2 + a\sqrt{5}/2$;
  - построить правильный пятиугольник ABCDE со сторонами, равными m, и диагоналями AC и BE, равными a;
  - вычислить высоту s треугольника ABC

Построение додекаэдра

- Вычислить расстояние h для точек K и L
- Соединить эти точки между собой и с вершинами S, P и Q, R куба, соответственно
- Тем самым будет построена «крыша» над гранью SPRQ куба
- Выполнить аналогичное построение для остальных пяти граней куба



Построение додекаэдра