Свойства арифметического корня n-ой степени

Алгебра 9 класс

Корень из произведения

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Доказательство:

$\sqrt[n]{a} \geq 0$ и $\sqrt[n]{b} \geq 0$

1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$ и 2) $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ $\quad (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$

По определению арифметического корня

Используя свойство степени произведения

По определению арифметического корня n-й степени.

Следовательно: корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

Примеры:

1. Найдем значение выражения $\sqrt[3]{64 \cdot 8}$

$$\sqrt[3]{64 \cdot 8} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{8} = 4 \cdot 2 = 8$$

2. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{81 \cdot 256}$

$$\sqrt[4]{81 \cdot 256} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{256} = 3 \cdot 4 = 12$$

3. Найдем значение выражения $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$

$$\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$$

Корень из дроби

Если a ≥ 0 и b > 0, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Доказательство

:

a≥o, b>0 по определению арифметического корня $\sqrt[n]{a} \geq 0$ $\sqrt[n]{b} > 0$ следовательно $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0$

$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n$ по свойству возведения в степень дроби получаем $\frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$

Следовательно: корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{625}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}}=\frac{3}{5}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}=\sqrt[3]{\frac{64}{27}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

Извлечение корня из корня

Если n, k $\in$ N и a $\geq$ 0, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Доказательство:

Так как a≥0, то выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ имеют смысл и неотрицательны.

$$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{n}\right)^{k} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k} = a$$

Следовательно: по определению арифметического корня верно равенство $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt{\sqrt[3]{6}}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[2\cdot 3]{6} = \sqrt[6]{6}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3\cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$$

3. Упростим выражение: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4\cdot 3]{3} = \sqrt[12]{3}$$

Основное свойство корня

Если n, k, m $\in$ N и a $\geq$ 0, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^{m}}$

Доказательство:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{\left(a^{m}\right)^{k}}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

Используя свойство:

$$\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$$

Используя свойство о возведении степени в степень.

Используя определение корня n-й степени.

Следовательно: Показатель корня и показатель степени подкоренного выражения можно разделить на одно и то же натуральное число.

Примеры:

1. Упростим выражение: $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}}$

$$\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$$

2. Упростим выражение: $\sqrt[6]{7^4}$

$$\sqrt[6]{7^4}=\sqrt[3]{\sqrt[2]{7^4}}=\sqrt[3]{7^2}=\sqrt[3]{49}$$