Производная и ЕГЭ

Авторы:
Емельянова Р.Н.

Цель исследования

Устранить некоторые противоречия между уровнем подготовки ученика средней школы в соответствии с программой по математике и требованиями, предъявляемыми к абитуриенту при поступлении в ВУЗы по теме «Применение производной к решению задач».

Задачи исследования

- Проанализировать задания КИМов ЕГЭ по теме «Производная».
- Выделить группы заданий по данной теме.
- Определить пути решения данных заданий.
- Познакомить учащихся с вариантами решений данных заданий.
- Закрепить знания учащихся по данной теме
- Мотивировать самостоятельную исследовательскую деятельность учащихся.

Актуальность исследования

Решение геометрических задач на нахождение наибольшего и наименьшего значения площади вызывает затруднения у школьников, а между тем они все чаще встречаются на школьных экзаменах ЕГЭ и на вступительных экзаменах в ВУЗах, поэтому эта проблема актуальна для учащихся.

Аннотация

Проанализировав задания КИМов, мы пришли к выводу, что геометрические задачи группы С представляют для учащихся большую трудность так как учебные программы общеобразовательной школы не предполагают углубленного изучения и отработки навыков решения задач по теме «Применение производной к решению геометрических задач».

Мы выделили две группы задач:

1) на нахождение наибольшего и наименьшего значения площади сечения;

2) решение задач на комбинацию геометрических тел.

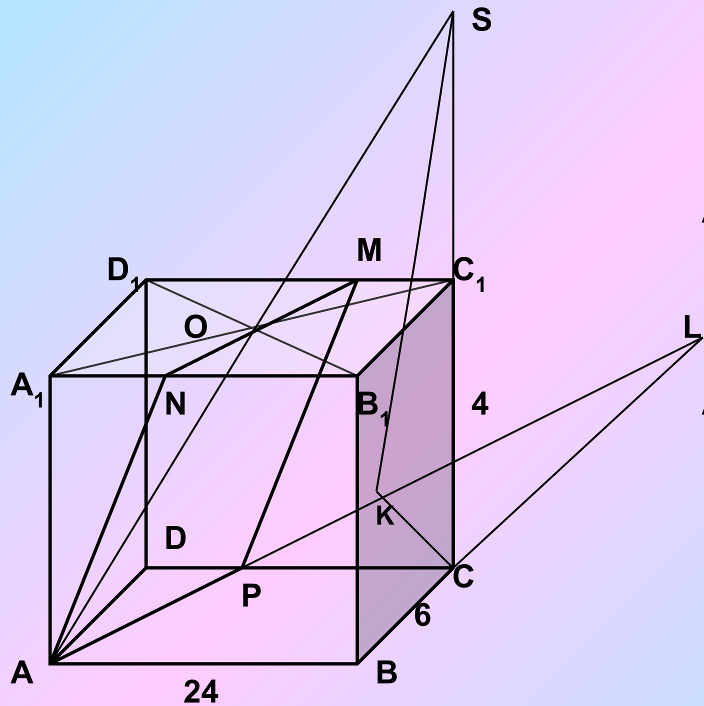
Важным при решении задач такого типа являются:

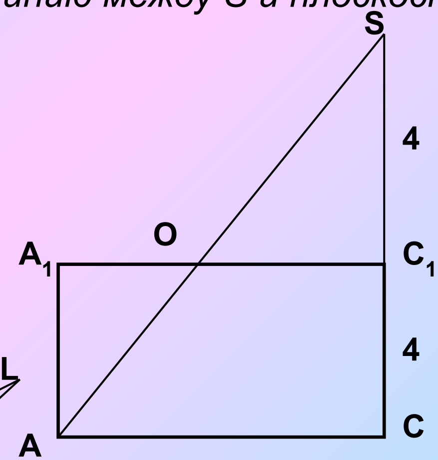
1) правильное построение геометрического тела и его сечения;
2) использование алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений функции.

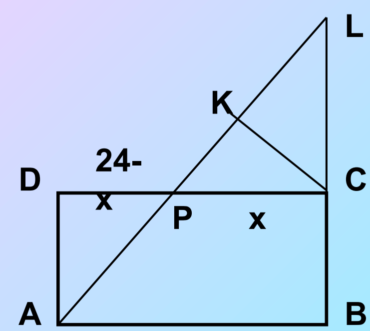
Задача 1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1 с ребрами CD = 24, AD= 6 и DD1 =4 проведена плоскость через центр симметрии грани A1B1C1D1* , вершину *A и точку P, лежащую на ребре DC. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? На какие части делит точка P ребро DC в этом случае?*

Решение. *Проведем плоскость и построим сечение (рис.). AO ∈ AA_1C_1C - линия, принадлежащая данной плоскости. Продолжим AO до пересечения с CC_1 в точке S. Тогда SP - линия пересечения грани DD_1C_1C и данной плоскости, а сечение ANMP - параллелограмм. Sсеч = SAMNP = SK*AP/2 , потому что SK/2— высота параллелограмма ANMP. Это видно из следующего рассуждения.*

В ΔASC OC_1 - средняя линия (значит SC_1 = 4), в ΔPSC также средняя линия MC_1, а плоскость $A_1B_1C_1D_1$ делит пополам любую линию между S и плоскостью ABCD, а значит и SK.







Пусть $PC = x$; ΔCLP подобен ΔDAP,
$LC/AD = x/(24-x)$, $LC = 6x/(24-x)$;

Из ΔCLP: $KC = (6x*x/(24-x))/(\sqrt{36x^2/(24-x)^2+x^2}) = 6x/(\sqrt{36+(24-x)^2})$;

Из ΔSCK: $SK = \sqrt{SC^2+KC^2} = \sqrt{64+36x^2/(36+(24-x)^2)} = 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)}$;
Из ΔADP: $AP = \sqrt{36+(24-x)^2}$;

$S_{сеч} = AP*SK/2 = 0,5*(\sqrt{36+(24-x)^2})\, 2\sqrt{16+9x^2/(36+(24-x)^2)} = \sqrt{16(36+(24-x)^2)+9x^2}$;
Если $S'(x) = 0$, то $18x+16*2(24-x)(-1) = 0$;
$50x-32*24 = 0$, $x = 32*24/50 = 32*12/25 = 384/25$ (это точка min);
$S_{сеч} = 312$;
$DP = 24-16*24/25 = 216/25$;
***Ответ:** 312 кв. ед.; DC: 384/25; 216/25.*

Задача 2. Высота пирамиды TABC с основанием ABC проходит через середину ребра AC. Выберите на AC точку M так, чтобы площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку M, середину ребра TC и вершину B, была наименьшей, если AB=BC=AC=TC=2.

Решение.

*HF=FC=1/2; SΔBME = BM*EK*1/2;*

Из ΔTCH => TH = √4—1=√3; EF = TH/2=√3/2;

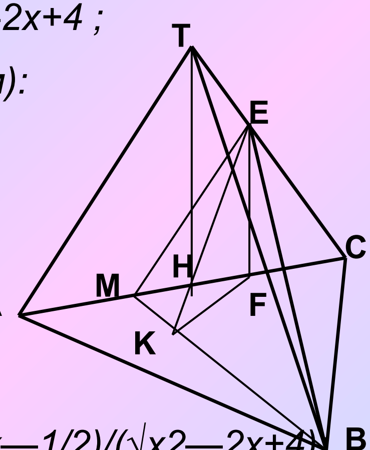
*Пусть MC = x. Из ΔBMC по теореме косинусов MB2= x2+4—2*2*x*1/2; MB = √x2—2x+4;*
*SΔBMC = 0,5*MC*BC*sinC=(x/2)*2√3 /2 = x√3/2;*

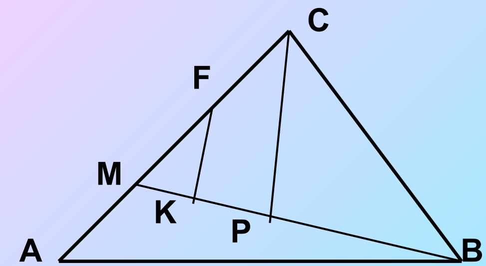
*SΔBMC = 0,5*BM*PC,*

PC = (2SΔBMC)/BM, PC = x√3/√x2—2x+4 ;

ΔKMF подобен ΔPMC(по двум углам):

KF/PC = MF/MC(рис 2),





KF = x√3(x—1/2)/(x√x2—2x+4) = √3(x—1/2)/(√x2—2x+4);

Из ΔKEF => KE = √ KF2+EF2 = √3(x—1/2)2/(x2—2x+4)+3/4;

*SΔBME = 0,5√x2—2x+4 *√3(x—1/2)2/(x2—2x+4)+3/4 = 0,5√3(x—1/2)2+(x2—2x+4)*3/4;*

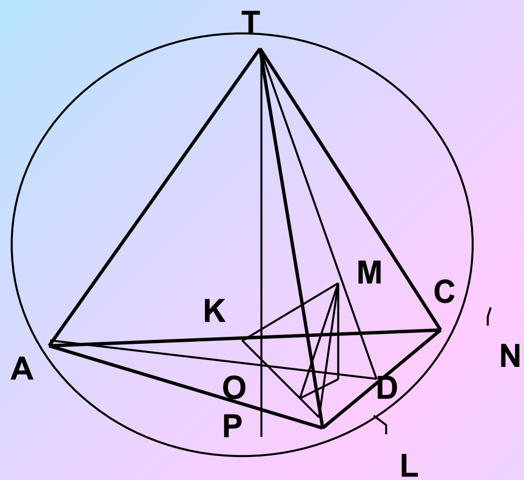
*Если S'(x) = 0, то 6(x—1/2)+(2x—2)*3/4 = 0; 15x—9 = 0; x = 3/5;*

S(3/5) = √15/5 кв.ед.

Ответ: *√15/5 кв.ед.*

Задача 3. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой боковое ребро образует с высотой пирамиды угол 60о. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник MBK, если точка M лежит на апофеме пирамиды, а BK — высота основания пирамиды, не пересекающая апофему?

Решение. TP = 2R, ∠ ATO = 60 градусов.



Пусть AB = BC = CA = a(рис.) Тогда AO = a√3/3,
AD = BK = a√3/2, TO = AO*ctg60o= a√3/3*1/√3 = a/3,
OD = a√3 /6, AO2 = TO*OP = TO(2R - TO),
a2/3 = a(2R – a/3)/3, a = 3R/2.
SΔMBK = BK*LM*1/2, BK = const,
SΔMBK = f(LM), LM = √MN2+NL2
Пусть MD = x, тогда MN = x cos / NMD;

$\cos$ □ $NMD = TO/TD = a/(3\sqrt{}a2/9+a2/12 = 2/\sqrt{}7$, $MN = 2x/\sqrt{}7$.

Из ΔONL: $LN = ON \cos 30o$ (□$ONL = 30o$);

$ON = OD – ND$,

$ND = x \sin$ □$NMD = x\ \sqrt{}3/\sqrt{}7$, $ON = a\sqrt{}3/6 - x\sqrt{}3/\sqrt{}7$,

$LN = (a\sqrt{}3/6 - x\sqrt{}3/7)\sqrt{}3/2 = (a/4 – 3x/(2\sqrt{}7))$,

$LM = \sqrt{}4x2/7+(a/4 – 3x/(2\sqrt{}7))2$.

Если $LM'(x) = 0$, то $8x/7+2(a/4 – 3x/(2\sqrt{}7))(-3/2\sqrt{}7) = 0$,

$8x/7 – 3a/4\sqrt{}7\ \ + 9x/14 = 0$,

$25x/14 = 3a/4\sqrt{}7$,

$x = 21a/50\sqrt{}7$.

$MN = (21a/50\sqrt{}7)*(2/\sqrt{}7) = 3a/25$,

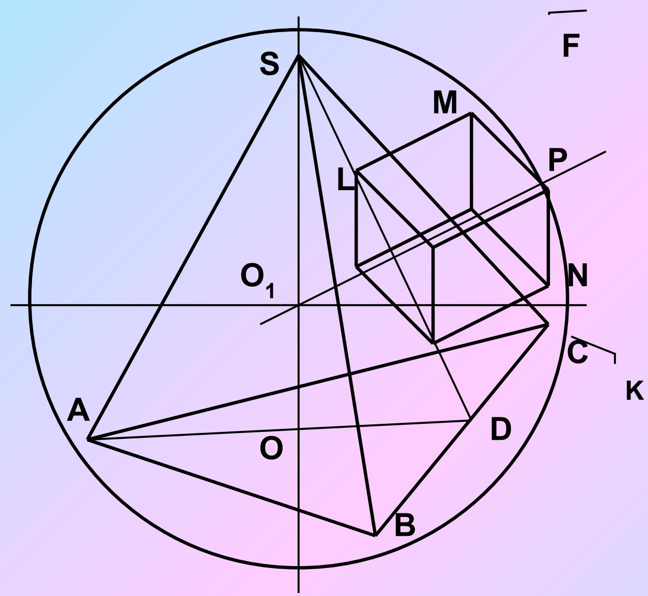
$LN = a/4 – (3/2\sqrt{}7)*(21a/50\sqrt{}7) = 4a/25$,

$LM = \sqrt{}a2/625 + 9a2/625 = a\sqrt{}10/25$. _

$S\Delta MBK = a\sqrt{}3/2*a/5*1/2 = a\sqrt{}3/20 = 9\sqrt{}3\ R2/80$.

Ответ: : $9\sqrt{}3\ R2/80$.

Задача 4. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, высота которой в 1,5 раза меньше высоты основания. Между боковой гранью пирамиды и сферой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой (ближнее к центру сферы) лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найти этот объем.



Решение.

SABC – правильная треугольная пирамида (рис), вписанная в сферу радиусом R,
SO*1,5 = AD, LMN – правильная четырехугольная призма.
Найти. Vпр = f(LM).
Пусть SO = H, тогда AD = 1,5H; SO1 = R – радиус сферы; LM = x –высота призмы.
∆SKO1 подобен ∆SOD => O1K/OD = SO1/SD => OK1 = OD*SO1/SD.
Из ∆AO1O: R2 = AO2 + O1O2 = (2AD/3)2 + (AD*2/3 - R)2,
R2 = 4AD2/9 + 4AD2/9 –AD*R*4/3,
8AD2/9 = AD*R*4/3 => AD = 3R/2.
Отсюда OD = R/2;
AO1 = R и SO1 = R;
SD = $\sqrt{R2 + R2/4}$ = R$\sqrt{5}$/2,
OK1 = 2*R*R/(2R$\sqrt{5}$) = R$\sqrt{5}$/5;

$O_1K = R\sqrt{5}/5.$

Из $\Delta O_1FN \Rightarrow R^2 = (O_1K + x)^2 + NF^2,$

$NF = \sqrt{R^2 – R^2/5 – 2x(\sqrt{5})^2/5 – x^2}$,

$S_{осн} = 2NF^2.$

$V_{пр} = S_{осн}*x = 2(R^2 – R^2/5 – 2x\sqrt{5}\, R/5 - x^2)*x;$

$V_{пр} = 2(4R^2x/5 – 2x^2\sqrt{5}\, R/5 - x^3);$

$V'_{пр}(x) = 2(4R^2/5 – 2x\sqrt{5}\, R/5 - 3x^2) = 0;$

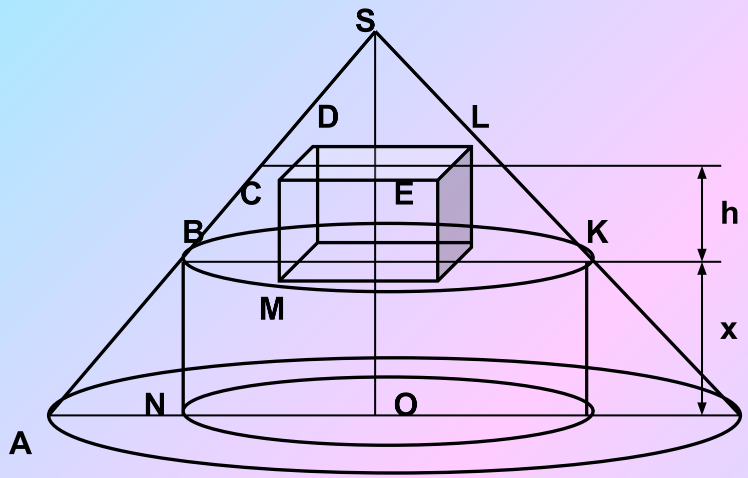
$X_{1,2} = (2R\sqrt{5}/5 + \sqrt{4R^2/5 + 12R^2/5})/(-3) = (2R\sqrt{5}/5 + 4R/\sqrt{5})/(-3);$

$X = 2\sqrt{5}\, R/15$

$V_{пр.max} = 2(4R^2*2\sqrt{5}R/(5*15) – 2\sqrt{5}R*4R^2/(45*5) - 40\sqrt{5}R^3/(225*15)) = 16R^3\sqrt{5}(1 – 1/3 – 5/45)/75 = 16\sqrt{5}R^3/135.$

Ответ: $16\sqrt{5}R^3/135$ м³ при $H = 2\sqrt{5}R/15.$

Задача 5. В конус вписан цилиндр, одно из оснований которого лежит в плоскости основания конуса, а окружность другого основания принадлежит боковой поверхности конуса. Правильная четырехугольная призма расположена так, что ее.



нижнее основание лежит в плоскости верхнего основания цилиндра, вершины верхнего основания принадлежат боковой поверхности конуса. Отношение длины диагонали основания призмы к ее высоте равно отношению длины диаметра цилиндра к его высоте. При какой высоте цилиндра объем призмы будет наибольшим? Найти этот объем призмы, если высота конуса – H и радиус основания – R.

Дано. ASO – конус;

SO = H;

AO = R;

CL/CM = BK/BN;

Найти. BN, чтобы Vпр = max

Решение.

BN = x, CM = h, Vпр = Sосн CM = CL2h/2.

∆CSD подобен ∆ASO: CD/AO = SD/SO;

CD/R = (H – x - h)/H; CD = R(H – x -h)/H.

∆BSE подобен ∆ASO: BE/AO = SE/SO;

BE/R = (H - h)/H; BE = R(H - h)/H.

Находим отношение CD/BE = (H – x - h)/(H - x).

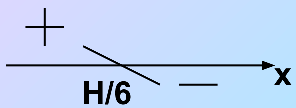
Исходя из условия (CL/CM = BK/BN) задачи делаем вывод,

что CD/BE = h/x, т. е. (H – x - h)/(H - x) = h/x => h = (Hx – x2)/H

Тогда CD = R(H – x – (Hx – x2)/H)/H = R(H2 – Hx – Hx +x2)/H2 = R(H - x)2/H2,

CL = 2CD = 2R(H - x)2/H2.

V = 4R2(H - x)4(H - x)x/(2H*H4) = 2R2(H - x)5x/H5;



V’(x) = 2R2((H - x)5 – 5(H - x)4 x)/H5 = 0,

(H – x) – 5x = 0, x = H/6.

V = 2HR^2(5H/6)^5/(6H^5) = 2(R^2)H*(5^5)/(6^6).

Ответ: при H/6, Vmax = 2(R^2)H*(5^5)/(6^6).

Задачи для самостоятельного решения

Приведение в систему знаний можно с успехом проводить с помощь специально подобранных задач самостоятельного решения.

- Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна р. При какой высоте пирамиды ее объем будет наибольшим. {Ответ:}.
- База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции? {Ответ: 3 ч 44 мин}.
- Открытый металлический бак с квадратным основанием должен вмещать 32 л воды. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала? {Ответ: 4 дм, 4 дм, 2 дм}.
- Периметр осевого сечения цилиндра равен р см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? {Ответ: р/6}.
- Закрытый металлический бак с квадратным дном должен иметь объем 343 . При каких размерах на его изготовление пойдет наименьшее количество материала? {Ответ: 7 м, 7 м, 7 м}.

Учащимся предлагается найти самостоятельные способы рещения задач, наиболее интересные решения обсуждаются в классе. Лучшие работы отмечаются грамотами.

Вывод

Данное исследование позволяет расширить знания учащихся по теме «Производная», закрепить навыки решения задач по нахождению наибольшего и наименьшего значения функции, мотивировать самостоятельную исследовательскую деятельность учащихся, заинтересовать их результатом учебной деятельности, научить применять полученные знания в практической деятельности (подготовка к ЕГЭ).