16.6. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как и в случае функции одной переменной, функция *z=f(x,y)* имеет узловые, определяющие график функции, точки.

Определим точки экстремума для функции двух переменных.

Точка М(x_0,y_0) называется точкой максимума (минимума) функции z=f(x,y), если существует окрестность точки М, такая что для всех точек (x,y) из этой окрестности выполняется неравенство:

$$\boxed{f(x_0, y_0) \geq f(x, y)} \quad max$$

$$\boxed{f(x_0, y_0) \leq f(x, y)} \quad min$$

Экстремум имеет локальный характер, поскольку рассматривается максимальное и минимальное значение функции в достаточно малой окрестности точки $M(x_0,y_0)$.

Сформулируем аналог теоремы Ферма для функции двух переменных:

необходимое услов... экстремума

ТЕОРЕМА.

Пусть точка (x_0, y_0) является точкой экстремума дифференцируемой функции $z=f(x,y)$.

Тогда частные производные в этой точке

$$f'_x(x_0, y_0) \quad f'_y(x_0, y_0)$$

равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Доказательство:

Пусть точка $M(x_0,y_0)$ – точка максимума.

Зафиксируем одну из переменных, например, y:

$$y=y_0$$

Тогда получим функцию одной переменной

$$z_1=f(x,y_0)$$

которая будет иметь максимум при $x=x_0$.

Согласно теореме Ферма $z_1'(x_0) = f_x'(x, y_0) = 0$

Аналогично можно доказать, что $f_y'(x_0, y) = 0$

Точки, в которых выполняются условия экстремума функции z=f(x,y), т.е.

$$z'_x = 0$$

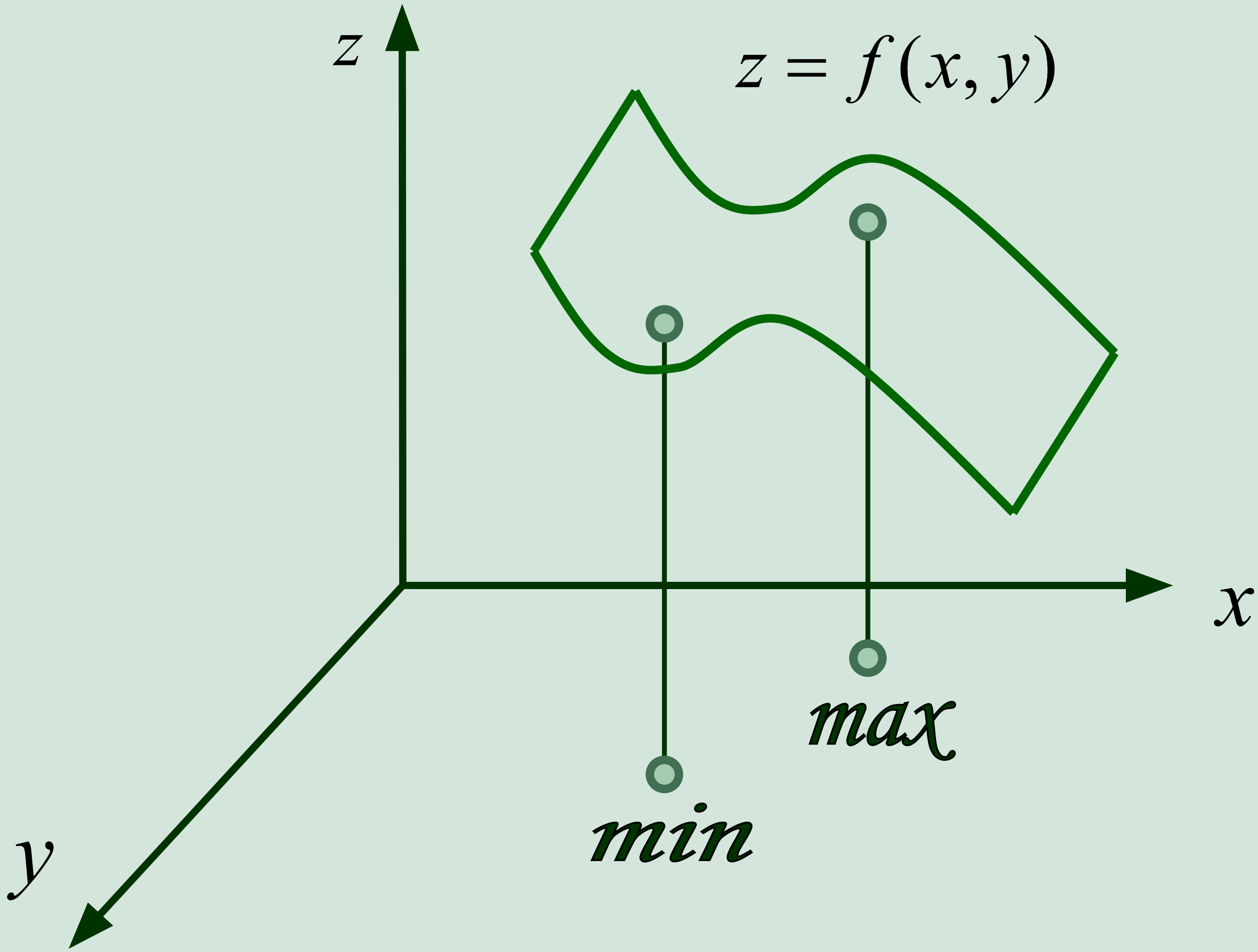
$$z'_y = 0$$

называются критическими или стационарными.

Необходимое условие экстремума можно сформулировать иначе:

В точках максимума или минимума дифференцируемой функции градиент этой функции равен нулю:

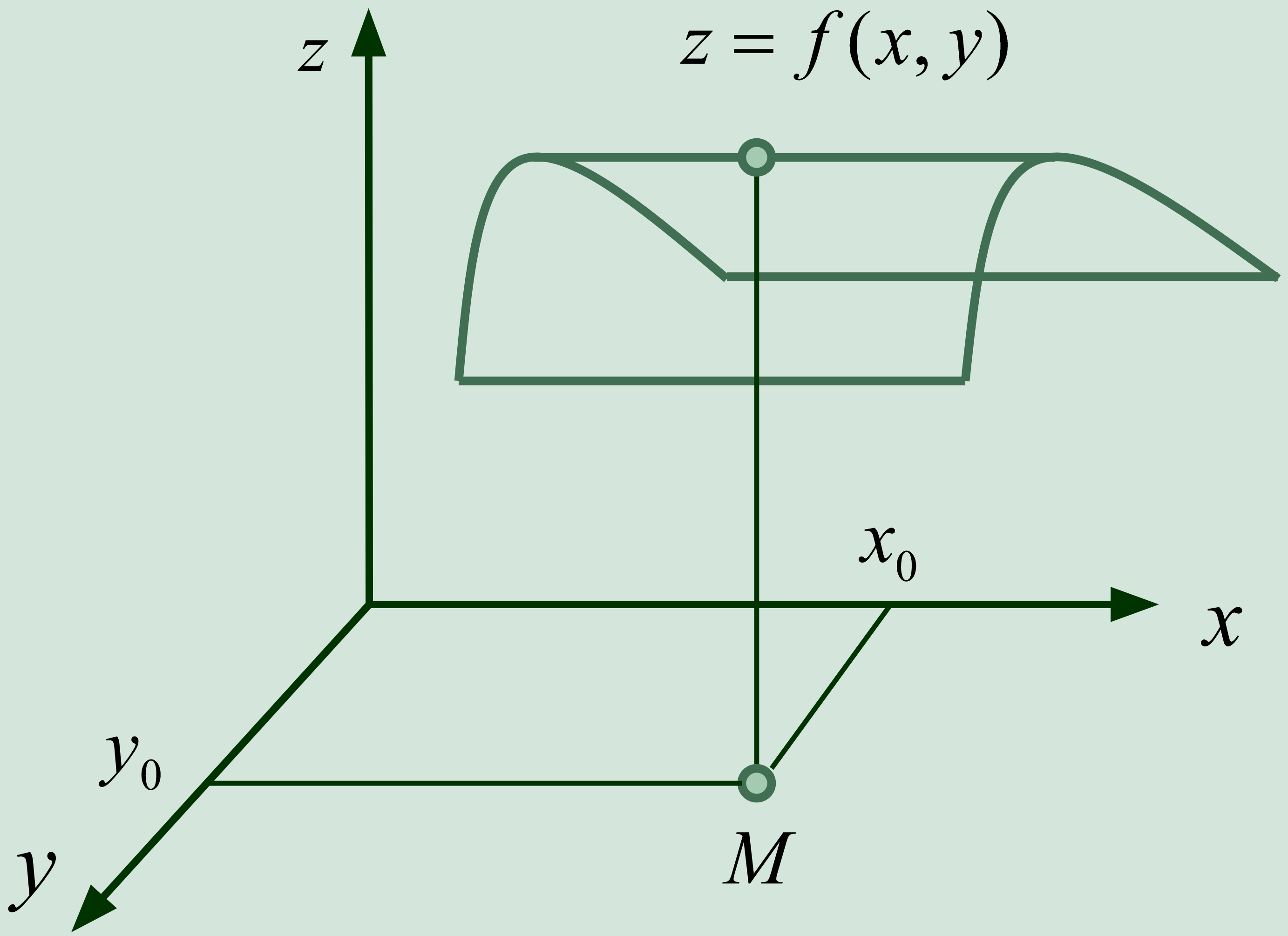
$$\nabla_z = 0$$


z
$z = f(x, y)$
x
y
max
min

Однако, сформулированное выше условие является необходимым, но не достаточным.

Т.е., если частные производные функции в точке равны нулю, то это еще не означает, что в данной точке имеется экстремум функции.

Например:



$z = f(x, y)$
z
x_0
x
y_0
y
M

В точке $M(x_0,y_0)$ выполняется необходимое условие экстремума:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Но эта точка не является точкой экстремума.

Она называется седловой точкой (аналог точки перегиба).

Чтобы отличать такие точки от точек экстремума, необходимо рассмотреть достаточное условие экстремума.

ТЕОРЕМА.
Достаточное условие экстр

Пусть функция z=f(x,y)

1

Определена в некоторой окрестности критической точки (x_0,y_0), в которой

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

②

Имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка:

$$f''_{xx}(xy) = A$$

$$f''_{xy}(xy) = f''_{yx}(xy) = B$$

$$f''_{yy}(xy) = C$$

Тогда, если $\Delta = A \cdot C - B^2 > 0$

то в данной точке функция имеет экстремум, причем

если A>0, то минимум

если A<0, то максимум

если $\Delta = A \cdot C - B^2 < 0$

то функция экстремума не имеет,

если $\Delta = A \cdot C - B^2 = 0$

то вопрос остается открытым.

СХЕМА исследования функции неско переменных на экстремум

1

Найти частные производные

$$z'_x = f'_x(x, y) \quad z'_y = f'_y(x, y)$$

2

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

и найти критические точки

3

Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в критических точках и с помощью достаточного условия экстремума сделать вывод о наличии экстремума функции.

4

Найти значения функции в точках экстремума.

Пример.

Найти экстремум функции

$$z = x^3 - y^3 - 3xy$$

Решение.

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$$

$$A_1 = 0 \quad B_1 = 0 \quad C_1 = -3$$

$$\Delta = -9$$

Экстремума нет.

$$A_2 = -6 \quad B_2 = 6 \quad C_1 = -3$$

$$\Delta = 27$$

Экстремум есть.

Т.к. A<0, то это будет максимум.