Семинар 3. Функция. Классификация функций. Основные свойства функций.

Понятие функции

При изучении различных явлений обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что значения одних величин (независимые переменные) полностью определяют значения других (зависимые переменные и функции).

Определение

Переменная величина y называется функцией (однозначной) от переменной величины x, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению x соответствует единственное вполне определенное значение величины y (сформулировал Н.И.Лобачевский).

Обозначение $y=f(x)$ (1)

Определение

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $M(x,y)$ плоскости OXY, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью. Или график функции – это линия, уравнением которой служит равенство, определяющее функцию.

Классификация функций одного аргумента

Принята следующая классификация:

1.Целая рациональная функция или многочлен

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

Над аргументом выполняются действия: сложение, вычитание, умножение, возведение в целую положительную степень.

2.Дробно-рациональная функция

$$R(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$$

1)и 2) – класс рациональных функций.

3.Иррациональная функция

Над аргументом x помимо вышеперечисленных операций производится операция извлечения корня конечное число паз и при этом результат не является рациональной функцией.

Пример
$$f(x)=\sqrt[5]{\frac{5x^2+4x-7}{3x^3-8x+4}}+\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^5$$

Совокупность рациональных и иррациональных функций образует класс <u>явных алгебраических функций</u>

4.Многозначная неявная функция

Это - более общий случай алгебраических функций

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\ldots+P_{n-1}(x)y+P_n(x)=0$$
, где n – целое положительное число

$P_0(x), P_1(x), \ldots$ - целые рациональные функции от x.

Пример
$$y^5+xy^3-x^2+x=0$$

5.Трансцендентные функции

Всякая неалгебраическая функция называется трансцендентной.

Элементарные трансцендентные функции:

а) показательная $a^x, a>0, a \neq 1$

б) логарифмическая функция $\log_a x, x>0, a>0, a \neq 1$

с) тригонометрические функции *sinx, cosx, tgx, ctgx;*

d) обратные тригонометрические функции *arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx.*

Обозначения:

D(f) – область определения функции *y=f(x)*. Областью определения функции может быть: интервал, сегмент, бесконечный интервал, совокупность интервалов или сегментов, вся числовая ось (множество действительных чисел).

E(f) – множество значений функции.

Функция *f(x)* область определения которой симметрична относительно нуля, называется четной, если *f(x)=f(-x)* для любого значения *x*. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция *f(x)* область определения которой симметрична относительно нуля, называется нечетной, если *f(-x)=-f-x)* для любого значения *x*. График четной функции симметричен относительно начала координат.

Задачи с решениями.

1. Найти область определения функции $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1}$

Решение. Данная функция определена, если $2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1/2$. Таким образом, областью определения функции является объединение двух интервалов

$$D(f)=(-\infty,1/2)\cup(1/2,+\infty)$$

2. Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$

Решение. Данная функция определена, если $1+x>0$, т.е. $x>-1$ и $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Таким образом, областью определения функции является объединение двух интервалов $D(f) = (-1,1) \cup (1,+\infty)$

3. Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

Решение. Для нахождения области определения функции необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ -1 \leq (3x-1)/2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1/2 \\ 3x-1 \geq -2 \\ 3x-1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1/2 \\ x \geq -1/3 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1/3 \leq x \leq 1/2$$

Следовательно, $D(f)=[-1/3;1/2]$

4. Найти множество значений функций $1) f(x) = x^2 - 6x + 5; 2) f(x) = 2 + 3\sin x$

Решение.

1) выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат, получаем .

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4 .$$

Первое слагаемое является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, не меньшие -4. Итак, множество значений функции – бесконечный промежуток $E(f) = [-4;+\infty)$.

2. Так как синус принимает значения, не превосходящие по модулю 1, запишем неравенство $|\sin x| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\sin x \le 3 \Leftrightarrow -1 \le 2 + 3\sin x \le 5$

Следовательно, *E(f)=[-1;5]*

5.Установит четность или нечетность функций:

1) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 2\sin x;$

2) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

3) $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$

4) $f(x) = x^2 + 5x$

5) $f(x) = \lg\dfrac{x+3}{x-3}$

Решение**.** В рассматриваемых примерах область определения каждой функции симметрична относительно 0; в первых четырех примерах $D(f) = (-\infty;+\infty)$, а в последнем $D(f) = (-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$

1) Заменяя *x* на *–x* получим $f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} - 2\sin x$, то есть *f(-x)=f(x)*. Значит данная функция нечетная

2) Имеем $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x \Rightarrow f(-x) = f(x)$ Следовательно, данная функция – четная.

3) Имеем $f(-x) = |x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2} \Rightarrow f(-x) = f(x)$ Следовательно, данная функция – четная.

4) Имеем $f(-x) = (-x)^2 - 5x = x^2 - 5x \Rightarrow f(-x) \ne f(x); f(-x) \ne -f(x)$ Таким образом, функция не является четной и не является нечетной.

5) Находим $f(-x) = \lg\dfrac{-x+3}{-x-3} = \lg\dfrac{x-3}{x+3} = -\lg\dfrac{x+3}{x-3} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Следовательно, данная функция – нечетная.

Задания для самостоятельного решения

1.Найти области определения функций:

$$1)\, f(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{1}{x};2)\, f(x)=\arccos(\frac{x}{2}-1);3)\, f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x};4)\, f(x)=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$$

2.Найти множества значений функций:

$$1)\, f(x)=|\,x\,|+1;2)\, f(x)=\sqrt{16-x^2};3)\, f(x)=-x^2+8x-13;4)\, f(x)=1-3\cos x;5)\, f(x)=4^{-x^2}$$

3.Установить четность или нечетность функций:

$$1)\, f(x)=x^4\sin 7x;2)\, f(x)=|\,x\,|-3\sqrt[3]{x^2};3)\, f(x)=x^4-3x^2+x;4)\, f(x)=|\,x\,|+2;5)\, f(x)=|\,x+2\,|;$$