

# Множества

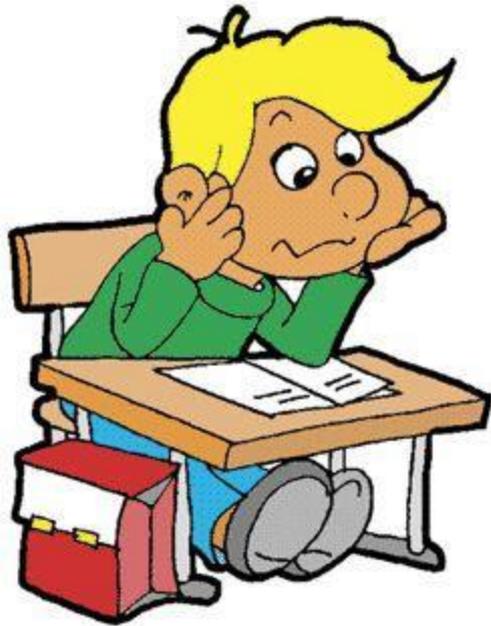
Выполнили:  
Базуева Анна,  
Чебанова Елена,  
Б-4051



# Содержание:

- Эквивалентное множество, мощность множеств (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Счетные множества (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Несчетные множества (определение, основные свойства, теоремы, примеры);
- Список источников.

# Мощность множеств



- **Мощность множества** — это обобщение понятия количества (числа элементов множества), которое имеет смысл для всех множеств, включая бесконечные.

*Мощность множества  $X$  обозначается:*

$$|X|$$

Например:  $X = \{1, 3, 6\}$ ,

$$|X| = 3$$

# Эквивалентные множества

**Определение:** Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются **равномощными множествами**, или **множествами, имеющими одинаковую мощность**, или **эквивалентными множествами по мощности**.

*Обозначение эквивалентных (равномощных) множеств:*

$$A \sim B, X \sim Y, \{a\} \sim \{b\}$$

# Свойства эквивалентности множеств

1. Отношение равномоцности симметрично: *если  $A$  равномоцно  $B$ , то  $B$  равномоцно  $A$ .*
2. Отношение равномоцности рефлексивно: *каждое множество равномоцно самому себе.*
3. Отношение равномоцности транзитивно: *если  $A$  равномоцно  $B$  и  $B$  равномоцно  $C$ , то  $A$  равномоцно  $C$ .*



# Примеры

1. Возьмём группу студентов из тридцати человек и выдадим экзаменационные билеты по одному билету каждому студенту из стопки, содержащей тридцать билетов, такое попарное соответствие из 30 студентов и 30 билетов будет одно-однозначным.
2. **Два множества, равномошные с одним и тем же третьим множеством, равномошны.**

*Если множества  $M$  и  $N$  равномошны, то и множества всех подмножеств каждого из этих множеств  $M$  и  $N$ , также равномошны.*



# Примеры

**Пример 2.** Покажем, что множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных положительных чисел. Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

1	2	3	...	$n$	...
↕	↕	↕		↕	
2	4	6	...	$2n$	...

иначе: каждому элементу  $n \in \mathbb{N}$  поставим в соответствие элемент  $2n$  множества четных положительных чисел.

Так как множество четных положительных чисел является подмножеством множества натуральных чисел, то этот пример показывает, что бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами  $A$  и  $B$  можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда  $N(A) = N(B)$ .

# Примеры

**Пример 3.** Покажем, что множество целых чисел  $\mathbb{Z}$  эквивалентно множеству натуральных чисел  $\mathbb{N}$ . Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & n & -n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \end{array}$$

иначе: каждому элементу  $n \in \mathbb{Z}$  поставим в соответствие элемент  $2n$ , если  $n > 0$ , и элемент  $-2n + 1$ , если  $n \leq 0$  множества натуральных чисел.

# Счетные множества

**Определение:** Множества, эквивалентные по числу элементов множеству  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  называются *счетными* множествами.

*Например, между множествами  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  и  $A = \{-1, -2, -3, \dots, -n, \dots\}$  можно установить взаимно-однозначное соответствие. Значит  $A \sim N$  и множество целых отрицательных чисел является счетным.*

# Теоремы

**Теорема 1.** Для того, чтобы множество  $A$  было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  (т.е. в так называемой форме последовательности).

**Теорема 2.** Из всякого бесконечного множества  $A$  можно выделить счетное множество.

# Теоремы



**Теорема 3.** Всякое бесконечное подмножество счетного множества тоже счетно.

**Теорема 4.** Сумма конечного числа счетных множеств есть также счетное множество.

**Теорема 5.** Сумма счетного числа конечных множеств есть конечное или счетное множество.

# Теоремы

**Теорема 6.** Сумма счетного числа счетных множеств есть также счетное множество.

**Теорема 7.** Если к бесконечному множеству добавить счетное или конечное множество, то это не изменит его мощности.

# Примеры

## Примеры.

Доказать, что следующие множества счетны:

$$1.64. \{n \in N \mid n = 2k, k \in N\}.$$

## Решение.

Установим взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и натуральными числами, например, упорядочив множество  $\{n \in N \mid n = 2k, k \in N\}$  следующим образом:

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

а затем каждому элементу множества поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Таким образом заданное множество является счетным.

**Что и требовалось доказать.**

**1.66.**  $\{n \in N \mid n = 2^k, k \in N\}$ .

**Решение.**

Множество  $\{n \in N \mid n = 2^k, k \in N\}$  упорядочим следующим образом:

$$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$$

далее каждому элементу множества поставив в соответствие его порядковый номер в этой последовательности. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между заданным множеством и множеством натуральных чисел. Следовательно, множество

$$\{n \in N \mid n = 2^k, k \in N\}$$

является счетным.

**Что и требовалось доказать.**

**1.69.** Используя результат задачи 1.68 доказать, что множество всех рациональных чисел  $Q = \{x \in R \mid x = \frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in Z\}$ .

**Решение.**

Множество рациональных чисел можно представить как объединение счетных множеств  $X_n = \{\frac{n}{k} \mid k \in N\} = \{\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \dots\}$ .

Каждое множество  $X_n$  счетное, поскольку каждому элементу можно поставить в соответствие натуральное число, стоящее в знаменателе. Тогда множество

$$Q = \{x \in R \mid x = \frac{m}{n}, n \neq 0, m, n \in Z\} = \bigcup_{n \in N} X_n$$

так же является счетным, как было доказано в задаче 1.68.

**Что и требовалось доказать.**

**1.68.** Пусть  $X_1, X_2, X_3, \dots$  — счетные множества. Доказать, что их объединение  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  — счетное множество.

**Решение.**

Пусть  $X_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,l}, \dots\}$ . Тогда элементы множества  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  можно записать в виде следующей таблицы:

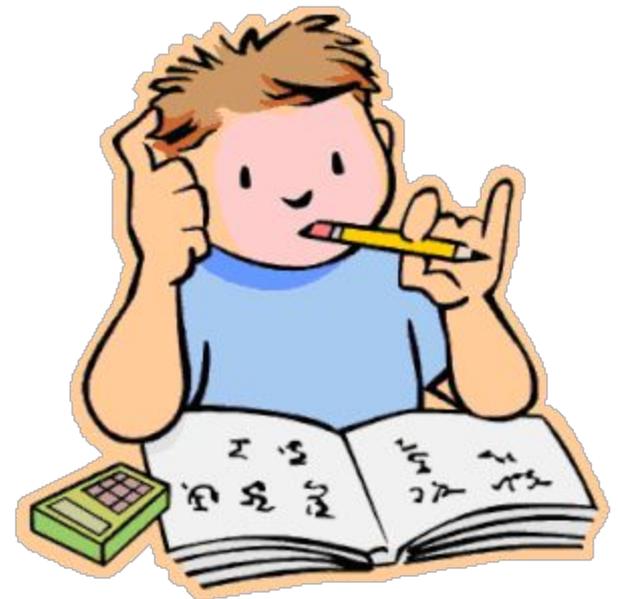
$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,1}, & x_{1,2}, & x_{1,3}, & \dots, & x_{1,l}, & \dots & \\ x_{2,1}, & x_{2,2}, & x_{2,3}, & \dots, & x_{2,l}, & \dots & \\ x_{3,1}, & x_{3,2}, & x_{3,3}, & \dots, & x_{3,l}, & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ x_{n,1}, & x_{n,2}, & x_{n,3}, & \dots, & x_{n,l}, & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Занумеруем элементы этой таблицы следующим образом: в качестве первого элемента берем элемент  $x_{1,1}$ , следующие два элемента -- элементы стоящие на диагонали  $x_{1,2}$  и  $x_{2,1}$ , затем считаем три элемента стоящие на следующей диагонали  $x_{3,1}$ ,  $x_{2,2}$  и  $x_{1,3}$  и так далее. Таким образом, каждому элементу множества  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  можно поставить в соответствие натуральное число (порядковый номер элемента, если их пересчитывать по указанной выше схеме). Следовательно, заданное множество счетное.

**Что и требовалось доказать.**

# Несчетное множество

**Определение.** Если множество  $B$  является бесконечным и не равномощно множеству  $\mathbb{N}$ , то его называют несчетным.



# Теоремы

**Теорема 1.** Множество  $[0;1]$  несчётно.

**Теорема 2.** Если множество  $A$  бесконечно, а множество  $B$  конечно или счётно, то объединение  $A \cup B$  равномощно  $A$ .

**Теорема 3.** Квадрат (со внутренней частью) равномощен отрезку.

# Теоремы

**Теорема 4 (Теорема Кантора-Бернштейна).** Если множество  $A$  равномощно некоторому подмножеству множества  $B$ , а  $B$  равномощно некоторому подмножеству множества  $A$ , то множества  $A$  и  $B$  равномощны.

**Теорема 5 (Теорема Кантора).** Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.

**Теорема 6 (обобщенная теорема Кантора).** Для любого множества  $A$  имеет место неравенство  $|A| < |P(A)|$ . (Никакое множество  $X$  не равномощно множеству всех своих подмножеств).

# Пример

Рассмотрим для простоты все вещественные числа полуинтервала  $[0, 1)$ . Для них для всех в указанной выше формуле  $a_0 = 0$ . Теперь предположим, что мы вдруг смогли каким-либо образом их все занумеровать, вытянув их в последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , исчерпывающую все числа в полуинтервале  $[0, 1)$ . Выпишем элементы этой последовательности в указанном выше виде:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0.a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_k^1 \dots \\x_2 &= 0.a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_k^2 \dots \\x_3 &= 0.a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots a_k^3 \dots \\&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\x_n &= 0.a_1^n a_2^n a_3^n \dots a_k^n \dots \\&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots\end{aligned}$$

Здесь  $a_k^n$  — цифра в  $k$ -м разряде после запятой числа  $x_n$  (не путать с  $n$ -й степенью числа  $a_k!$ ). Все эти цифры вместе образуют такую бесконечную таблицу (бесконечную **матрицу**, если хотите). Она может выглядеть как-нибудь так:

# Пример

0.3141592653589793238462643383279 ...  
0.2718281828459045235360287471352 ...  
0.1618033988749894848204586834365 ...  
0.1414213562373095048801688724209 ...  
0.1732050807568877293527446341505 ...  
0.2236067977499789696409173668731 ...  
0.1202056903159594285399738161511 ...

⋮

Теперь построим вещественное число

$$x = 0.b_1b_2b_3 \dots b_k \dots, \quad \text{где } b_i = 9 - a_i^i.$$

То есть мы берём из первого числа  $x_1$  первую цифру после запятой, вычитаем её из девяти и ставим результат первой цифрой числа  $x$ ; потом берём из второго числа  $x_2$  вторую цифру после запятой, вычитаем её из девяти, ставим результат второй цифрой числа  $x$  и так далее. В нашем примере у нас получится что-то вроде

$x_1 = 0.\mathbf{3}141592653589793238462643383279 \dots$   
 $x_2 = 0.2\mathbf{7}18281828459045235360287471352 \dots$   
 $x_3 = 0.16\mathbf{1}8033988749894848204586834365 \dots$   
 $x_4 = 0.141\mathbf{4}213562373095048801688724209 \dots$   
 $x_5 = 0.1732\mathbf{0}50807568877293527446341505 \dots$   
 $x_6 = 0.22360\mathbf{6}7977499789696409173668731 \dots$   
 $x_7 = 0.120205\mathbf{6}903159594285399738161511 \dots$

⋮

$$x = 0.\mathbf{6285933} \dots$$

# Пример

Это число гарантированно (не только в нашем примере, а вообще) лежит в интервале  $[0, 1)$  и по нашему предположению должно быть занумеровано. Однако, это число *не может быть среди занумерованных*. В самом деле: пусть у него есть порядковый номер  $n$ . Но его  $n$ -я цифра после запятой *по построению* отличается от  $n$ -й цифры  $n$ -го числа:  $b_n = 9 - a_n^n \neq a_n^n$ ! Полученное противоречие означает, что все вещественные числа полуинтервала  $[0, 1)$  невозможно занумеровать.

**Замечание.** Я слукавил немножко, сказав, что  $x$  обязательно лежит в  $[0, 1)$  только потому, что у него часть перед запятой нулевая. Дело в том, что вещественное число  $0.999999\dots$  считается в математике равным единице (тому есть веские причины), так что оно не лежит в  $[0, 1)$ , хотя вполне может получиться в ходе нашего процесса, если на «диагонали» таблицы все нули. Впрочем, это означает, что число  $0.111111\dots$  заведомо не занумеровано — в его представлении-то нет ни одного нуля. Можно обойти проблему и другим способом: вооружившись сакральным знанием о единице, мы можем просто повторить все наши рассуждения для отрезка  $[0, 1]$  вместо полуинтервала. Части перед запятой у всех чисел в этом отрезке можно считать нулевыми, потому что  $1 = 0.999999\dots$ .

В связи с нenumerуемостью говорят, что полуинтервал  $[0, 1)$  — *множество мощности континуума*.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ:

Электронные ресурсы:

- Режим удаленного доступа:

<http://math.siomax.ru/Sets>;

- Режим удаленного доступа:

<http://www.mathprofi.ru/mnozhestva.html>;

- Режим удаленного доступа:

[http://edu.alnam.ru/book\\_abmn.php?id=10](http://edu.alnam.ru/book_abmn.php?id=10).