Дискретная математика

Преобразование выражений

Любую формулу можно преобразовать к ДНФ.

1) Заменить все знаки функций на знаки булевых функций (конъюнкция (∧), дизъюнкция (∨) и отрицание (¬)), используя тождества.

2) По закону де Моргана и двойного отрицания опустить отрицание до переменных.

3) По закону дистрибутивности раскрыть скобки.

Преобразование выражений

4) Уменьшить число конъюнкций, пользуясь законами поглощения, склеивания, уничтожения кратности, свойствами констант.

5) Уменьшить число элементов в конъюнциях, пользуясь законом уничтожения кратности, свойствами констант.

Получим ДНФ.

Приведение к ДНФ

$$F(x,y,z)=\overline{\left(x\bar{y}\vee\bar{x}yz\right)}\cdot\overline{x\vee y}=$$

$$=\left(\overline{x\bar{y}}\cdot\overline{\bar{x}yz}\right)\cdot\bar{x}\,\bar{y}\overset{8}{=}$$

$$=\left(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}}\right)\cdot\left(\bar{\bar{x}}\vee\bar{y}\vee\bar{z}\right)\cdot\bar{x}\,\bar{y}\overset{15}{=}$$

$$=\left(\bar{x}\vee y\right)\cdot\left(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}\right)\cdot\bar{x}\,\bar{y}\overset{5}{=}$$

Приведение к ДНФ

$$=\left(\bar{x}\,x \vee \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xy \vee \bar{y}y \vee y\bar{z}\right)\cdot \bar{x}\,\bar{y} \overset{12}{=}$$

$$=\left(\bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z} \vee xy \vee y\bar{z}\right)\cdot \bar{x}\,\bar{y} \overset{1,3}{=}$$

$$=\left(\left(\bar{x}\,\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{z}\right) \vee xy\right)\cdot \bar{x}\,\bar{y} \overset{26}{=}$$

$$=\left(\left(\bar{x}\,\bar{y} \vee y\bar{z}\right) \vee xy\right)\cdot \bar{x}\,\bar{y} \overset{3}{=}$$

Приведение к ДНФ

$$\left(\bar{x}\,\bar{y} \vee y\bar{z} \vee xy\right)\cdot \bar{x}\,\bar{y} \overset{5}{=}$$

$$= \bar{x}\,\bar{y}\cdot\bar{x}\,\bar{y} \vee y\bar{z}\cdot\bar{x}\,\bar{y} \vee xy\cdot\bar{x}\,\bar{y} \overset{10,12}{=}$$

$$= \bar{x}\,\bar{y} \vee \bar{x}\,\bar{z}\cdot 0 \vee 0 \overset{16,17}{=} \bar{x}\,\bar{y}.$$

Переход от ДНФ к КНФ

1) Пусть функция f задана в виде ДНФ.

$$F = k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_n$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots, k_n$ – элементарные конъюнкции.

Переход от ДНФ к КНФ

2) Применим закон двойного отрицания $\overline{\overline{F}} = F$.

3) Приведем к ДНФ $\overline{F}$.

$$\overline{F} = \overline{k_1 \vee k_2 \vee \ldots \vee k_n} = \overline{k}_1 \wedge \overline{k}_2 \wedge \ldots \wedge \overline{k}_n =$$

$$= d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_n = k_1' \vee k_2' \vee \ldots \vee k_{n'}'$$

Здесь $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – элементарные дизъюнкции.

Переход от ДНФ к КНФ

4) Возьмем второе отрицание над F. Во время преобразования не будем раскрывать скобки – остановимся на формуле, имеющей вид конъюнкции элементарных дизъюнкций – КНФ.

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{k'_1 \vee k'_2 \vee \ldots \vee k'_{n'}} =$$

$$= \overline{k'_1} \wedge \overline{k'_2} \wedge \ldots \wedge \overline{k'_{n'}} =$$

$$= d'_1 \wedge d'_2 \wedge \ldots \wedge d'_{n'}$$

Правило получения СКНФ из вектор-столбца

1) Выбрать все нулевые наборы значений аргументов.

2) Каждому нулевому набору поставить в соответствие элементарную дизъюнкцию всех переменных так, чтобы в дизъюнкции переменная была с отрицанием, если в наборе она равна 1.

3) Соединить полученные элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

Правило построения СКНФ из вектор-столбца

Функция задана таблицей

1. Выбрать все нулевые наборы значений аргументов

x	y	F(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Правило построения СКНФ из вектор-столбца

2. Каждому нулевому набору сопоставить элементарную дизъюнкцию всех переменных

x	y	F(x,y)	
0	0	0	$x \vee y$
0	1	1	
1	0	0	$x \vee y$
1	1	0	$x \vee y$

Правило построения СКНФ из вектор-столбца

так чтобы переменная в дизъюнкции была с отрицанием, если в наборе она равна 1.

x	y	F(x,y)	
0	0	1	$x \vee y$
0	1	0	
1	0	1	$\bar{x} \vee y$
1	1	1	$\bar{x} \vee \bar{y}$

Правило построения СКНФ из вектор-столбца

3. Соединить полученные дизъюнкции знаком конъюнкции

$$(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$$