Самофокусировка света: физическая картина

Для кубичной восприимчивости вида $\chi^{(3)}(\omega;\omega,-\omega,\omega)$

поляризация $\mathbf{P}=\mathbf{P}^{(1)}+\mathbf{P}^{(3)}=\left(\chi^{(1)}+\chi^{(3)}:\mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_\omega\right)\mathbf{E}_\omega$

показатель преломления $n(\mathbf{r},t)=\sqrt{1+4\pi\left(\chi^{(1)}+\chi^{(3)}\left|E_\omega\right|^2\right)}\approx n_0+n_2\left|E_\omega\right|^2$

где $n_0=\sqrt{1+4\pi\chi^{(1)}},\ n_2=\dfrac{2\pi\chi^{(3)}}{n_0}$

Запишем волновое уравнение с зависящим от напряженности показателем преломления:

$$\nabla^2 E-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(n_0+\Delta n\right)^2 E\right]=0$$

- среда изотропна,
- волна поперечна
- отклик мгновенный

$\Delta n>0$ - в центре пучка показатель преломления больше, скорость меньше, волновой фронт искажается внутрь, фокусировка

$\Delta n<0$ - в центре пучка показатель преломления меньше, скорость больше, волновой фронт искажается вперед, дефокусировка

- баланс фокусировки и дисперсионного расплывания

Самофокусировка света: феноменология

Запишем волновое уравнение с зависящим от напряженности показателем преломления:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\left(n_0 + \Delta n\right)^2 E\right] = 0$$

! Уравнение трехмерно, поперечными производными пренебрегать нельзя

В приближении ММА в координатах $\xi = t - z / v_g$ и

$$E = E_0\left(r, z, \xi\right)\exp\left(ikz - i\omega t\right)$$

волновое уравнение редуцируется к уравнению для амплитуды

$$\left(i2k\frac{\partial}{\partial z} + \nabla_\perp^2\right)E_0 = -2k^2\frac{\Delta n}{n_0}E_0$$

- пучок распространяется вдоль оси *z*
- профиль пучка имеет круговую симметрию

Самофокусировка света и дифракция

Записав амплитуду волны в виде $E_0 = E_0(r, z, \xi) = Ae^{i\varphi}$,
уравнение запишется в виде двух:

$$k \frac{\partial}{\partial z} A^2 = -\nabla_\perp \cdot \left(A^2 \nabla_\perp \varphi \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi + \frac{1}{2k}\left(\nabla_\perp \varphi\right)^2 - \frac{k}{2}\left(\frac{\nabla_\perp^2 A}{k^2 A} + \frac{2\Delta n}{n_0} \right) = 0$$

первое уравнение описывает временную и пространственную зависимость интенсивности пучка

поскольку фаза $\varphi(r, z, \xi)$ задает волновой фронт пучка, второе уравнение описывает траекторию пучка

$2\Delta n / n_0$ - влияние самофокусировки

$\dfrac{\nabla_\perp^2 A}{k^2 A}$ - влияние дифракции

Самофокусировка света: самоканалирование

при условии баланса самофокусировки и дифракции:

$$\frac{\nabla_{\perp}^{2} A}{k^{2} A}+\frac{2 \Delta n}{n_{0}}=0$$

волновой фронт становится плоским - $\nabla_{\perp} \varphi=0$

а пара уравнений сводится к виду $\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial A}{\partial z}=0$

Это условие самоканалировния света

Самофокусировка гауссовых пучков

В параксиальном (безабберационном) приближении гауссов пучок при самофокусировке остается гауссовым:

$$A(r,z) = A_0 \frac{a_0}{a(z)} \exp\left[-\frac{r^2}{2a^2(z)}\right]$$

$a_0, \quad a$ - радиус пучка вначале и в точке рассмотрения

Рассмотрим добавку в показатель преломления в виде $\Delta n = n_2 |E|^2$

Мощность лазерного пучка запишем в виде

$$P = \frac{n_0 c}{2\pi} \int_0^\infty A^2 \, 2\pi r \, dr = \frac{n_0 c a_0^2 A_0^2}{2}$$

Введем еще одну величину размерности мощности

$$P_0 = \frac{c\lambda^2}{8\pi^2 n_2}$$

Длина самофокусировки

Зависимость размера пучка от пройденного расстояния в нелинейной среде

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \left(1 - \frac{P}{P_0}\right)\frac{2z^2}{k^2 a_0^4} + \left(1 + \left(\frac{da}{dz}\right)_0 \frac{z}{a_0}\right)^2$$

Если исходная расходимость пучка мала, $\frac{k}{2}\left(\frac{da}{dz}\right)_0^2 << \frac{1}{\lambda}$

то при $P = P_0$ $a = a_0$, т.е. реализуется самоканалирование

условие фокуса, $a = 0$, достигается на длине самофокусировки

$$z_f^2 = \frac{k^2 a_0^4}{2\left(P/P_0 - 1\right)}$$