ЛЕКЦИЯ 1 Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей

ЛЕКЦИЯ 1 Числовые последовательности. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Основные свойства бесконечно малых последовательностей

ПЛАН

1.**Числовые последовательности**

2.**Арифметические действия над числовыми последовательностями**

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

4. **Основные свойства бесконечно малых последовательностей**

5. **Сходящиеся последовательности. Свойства сходящихся последовательностей**

6. **Число «е». Второй замечательный предел**

1.Числовые последовательности

Если каждому n из множества натурального ряда чисел 1,2,3,...n,... поставлено в соответствие по определённому закону некоторое вещественное число x_n, то множество чисел

$$x_1, x_2 x_3, \ldots x_n, \ldots \qquad (1)$$

называется *числовой последовательностью* и обозначается $\{x_n\}$, при этом x_n называется *общим членом числовой последовательности*, а число n - его номером. Числа x_n называются *элементами* или *членами* числовой последовательности.

Например, последовательность с общим членом $x_n=\frac{1}{n}$, будет последовательностью чисел $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Последовательность с общим членом $x_n = 1 + (-1)^n$ будет последовательностью чисел $0, 2, 0, 2, \ldots, (1+(-1)^n), \ldots = \{1+(-1)^n\}$

Арифметическая и геометрическая прогрессия также являются числовыми последовательностями.

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_1 + d(n-1)$, где d – разность арифметической прогрессии. Например, 1, 5, 9, …, 4n-3, …; $x_n = x_1 + 4(n-1) = 4n-3$, $d = 4$.

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность с общим членом $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$, где q – знаменатель геометрической прогрессии. Например: 3, $\frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \ldots\ldots, \frac{3}{5^{n-1}}, \ldots\ldots; x_n = 3\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}, q = \frac{1}{5}$.

2.Арифметические действия над числовыми последовательностями

Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на число m назовем последовательность:

$m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, ..., mx_n, ...$;

Суммой данных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назовем последовательность $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$.

Разностью данных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ назовем последовательность $\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$.

Произведение последовательностей: $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$;

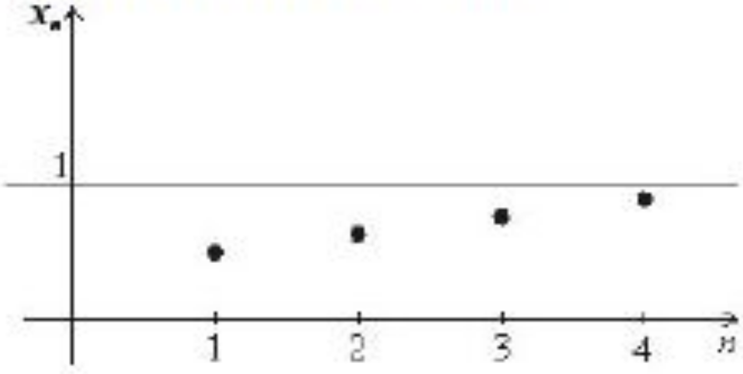
Частное последовательностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Числовая последовательность называется *возрастающей*, если каждый ее член больше предыдущего, иными словами, если для всякого n > 1 верно неравенство $x_n > x_{n-1}$.

Аналогично дается определение *убывающей* числовой последовательности.

Вместе возрастающие и убывающие последовательности называются монотонными последовательностями.

Последовательность $x_1, x_2 x_3, \ldots x_n, \ldots$ можно изобразить «графиком», который будет состоять из отдельных точек координатной плоскости.



Последовательность $x_1, x_2 x_3, \ldots x_n, \ldots$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует такое число M (число m), что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$).

Последовательность $x_1, x_2 x_3, \ldots x_n, \ldots$ называется *ограниченной*, если она ограничена с сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что любой элемент x_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$ (рис.1).

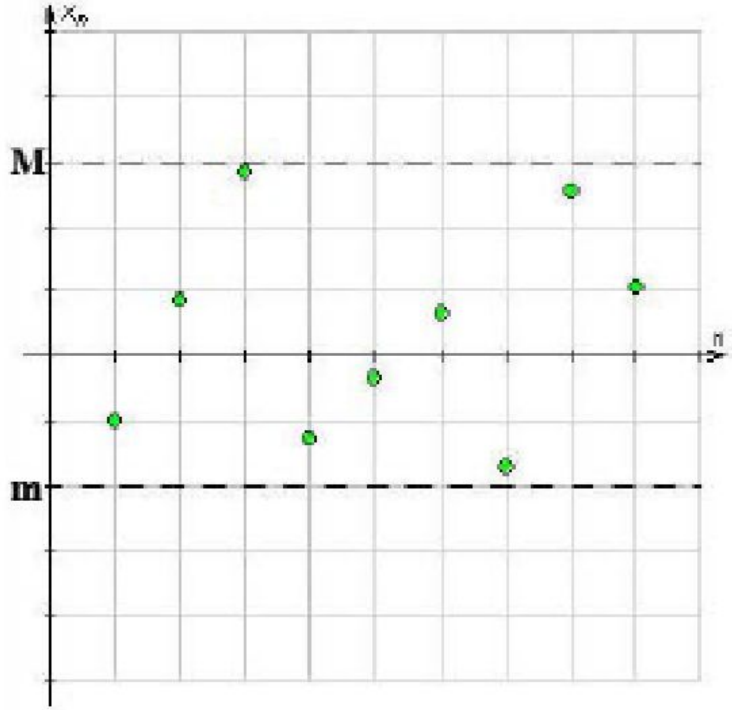


Рис. 1.

Последовательность $x_1, x_2 x_3, \dots x_n, \dots$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа A существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \geq A$ (т.е. либо $x_n > A$, либо $x_n < -A$).

3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа A, сколь угодно большого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n| > A$$

Например, последовательность натурального ряда чисел 1, 2, …, n, … является бесконечно большой, т.к. какое ни возьми число N, начиная с которого, для $n \geq N$, члены последовательности будут всё-таки больше A.

Последовательность 1, 2, 1, 3, 1, 4, …, 1, n, … не является бесконечно большой, так как для всех нечетных членов этой последовательности неравенство $|x_n| > A$ не будет выполняться.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε, сколь угодно малого, можно указать номер N такой, что при $n \geq N$ все элементы $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Например, геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q|<1$, является бесконечно малой числовой последовательностью.

Рассмотрим геометрическую прогрессию с общим членом

$$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}:\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ ...,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ ....$$

Выберем сколь угодно малое число ε, например, ε=0,1. Начиная с номера $N=5$, для всех членов последовательности справедливо неравенство $x_n<0{,}1$. Если выбрать ε=0,01, то, начиная с номера $N=8$, для всех членов последовательности справедливо $x_n<0{,}01$.

Если в неравенстве $|\alpha_n|<\varepsilon$ раскрыть модульные скобки, то $(-\varepsilon<\alpha_n<\varepsilon)$ показывает, что начиная с номера N, зависящего от ε, все члены последовательности попадают на интервал ($-\varepsilon$; ε). Для рассмотренного примера, при ε=0,1, начиная с N=5 члены последовательности попадают на интервал (-0,1;0,1); при ε=0,01 на интервал (-0,01;0,01). Чем меньше ε, тем больше номер N. Все члены последовательности приближаются к нулю, но ни при одном n, не обращаются в нуль.

Рассмотрим пример последовательности с общим членом $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$,

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Изобразим точками на числовой оси элементы этой последовательности (см. рис.2)

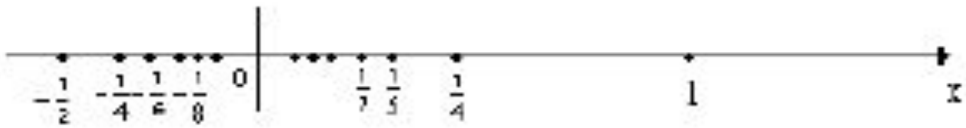


Рис. 2. Числовая последовательность с общим членом $x_n=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$

Видно, что члены последовательности приближаются к нулю, при этом ни один элемент последовательности не равен нулю. Для любого, сколь угодно малого, $\varepsilon > 0$, можно указать номер N, начиная с которого для всех $n \geq N$, справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$. Так для $\varepsilon = 0{,}1$ номер $N = 11$, для $\varepsilon = 0{,}01$, номер $N = 101$ и т.д. Значит, последовательность также является бесконечно малой.

4. Основные свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая. $\{\alpha_n\}+\{\beta_n\}=\{\alpha_n+\beta_n\}=\gamma_n$.

2. Разность двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\}-\{\beta_n\}=\{\alpha_n-\beta_n\}=\gamma_n$.

3. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая $\{\alpha_n\}\cdot\{\beta_n\}=\{\alpha_n\cdot\beta_n\}=\{\gamma_n\}$.

4. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность, то, начиная с некоторого номера n, определена последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$, которая является бесконечно малой.

$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}=\{\alpha_n\}$.

5. Если все члены бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ не равны нулю, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ бесконечно большая. $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}=\{x_n\}$.

5. Сходящиеся последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число a, что последовательность $x_n - a$ является бесконечно малой. При этом число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ и обозначается

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \text{или}\ x_n \to a \ \text{при}\ n \to \infty \qquad (2)$$

Дадим эквивалентное определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся*, если существует такое число a, что для любого сколь угодно малого положительного ε, найдется номер N, такой, что при $n \geq N$ все элементы последовательности x_n удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (3)$$

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$. Будем говорить, что x_n попадает в ε - окрестности точки a (рис. 3).

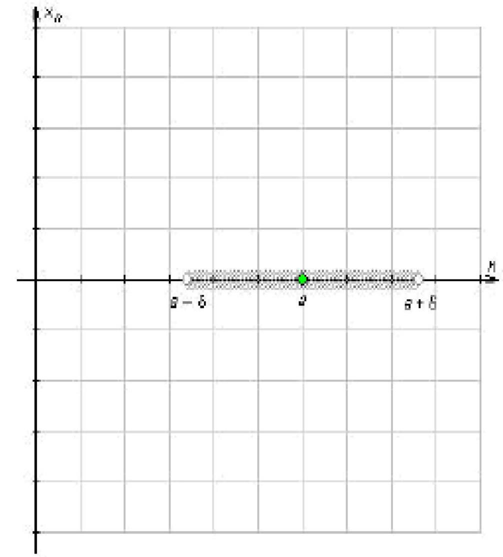


Рис. 3.

ПРИМЕРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Последовательность $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Составим последовательность $\{x_n-a\}=\left\{\dfrac{n}{n+1}-1\right\}=\left\{-\dfrac{1}{n+1}\right\}$.

Докажем, что последовательность $\left\{-\dfrac{1}{n+1}\right\}$ бесконечно малая. Если $n\geq N$, то $\left|-\dfrac{1}{n+1}\right|\leq\dfrac{1}{N+1}$, и поэтому по данному $\varepsilon>0$ достаточно выразить номер N из условия $\dfrac{1}{N+1}<\varepsilon$ или $N>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

2. Последовательность $3,\ 2\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{4},\ ...,\ 2+\frac{1}{n},\ ...$ сходится к числу a=2.

Действительно, $x_n=2+\dfrac{1}{n}$, тогда последовательность $\{x_n-a\}=\left\{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)-2\right\}=\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ бесконечно малая.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Сходящаяся последовательность имеет только один предел (без доказательства).

2. Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть последовательность сходящаяся, а её предел равен сумме пределов.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тогда $x_n = a + \alpha_n$, α_n – бесконечно малая последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, тогда $y_n = b + \beta_n$, β_n – бесконечно малая последовательность.

Сумма $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$. Общий член последовательности может быть записан $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$, т.к. $\alpha_n + \beta_n$ есть сумма двух бесконечно малых последовательностей и является бесконечно малой последовательностью, то $x_n + y_n = (a+b) + \gamma_n$, где $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$.

3. Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$есть последовательность сходящаяся, а её предел равен разности пределов. Доказательство аналогично доказательству свойства 2.

4. Произведение сходящихся последовательностей есть последовательность сходящаяся, а её предел равен произведению пределов.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,тогда $x_n = a+\alpha_n$, $x_n = \beta_n + b$, где α_n и β_n – бесконечно малые последовательности. Произведение $\{x_n\}\cdot\{y_n\}=\{x_n \cdot y_n\}$, а $x_n y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$.

$(b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n)$ является суммой бесконечно малых последовательностей и сама является бесконечно малой, например, γ_n. Тогда $x_n y_n = ab + \gamma_n$ и следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$.

5. Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ при условии, что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть последовательность сходящаяся, а её предел равен частному пределов (без доказательства).

6. Число «е». Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что она сходится. Для этого достаточно доказать, что последовательность $\{x_n\}$ - возрастающая и ограничена сверху.

Применив формулу бинома Ньютона, найдем

$$x_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\frac{1}{n^n}$$

Представим это выражение в следующей форме:

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (4)$$

Аналогичным образом представим x_{n+1}:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

Заметим теперь, что $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ при $0<k<n$. Поэтому каждое слагаемое в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n и, кроме того, у x_{n+1} по сравнению с x_n добавляется еще одно положительное слагаемое, следовательно, $x_n<x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

Для доказательства ограниченности сверху данной последовательности заметим, что каждое выражение в круглых скобках в соотношении (4) меньше единицы. Учитывая также, что $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$, для любого $n\geq 2$, получим

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}},$$

где $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии S_{n-1}, $S_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$. Получили, что $2<x_n<3$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ - возрастающая и ограничена сверху, следовательно, имеет предел. Этот предел обозначается буквой «е».

Leonhard Euler
швейцарский, немецкий и
российский математик и механик
(1707 – 1783)

Число «е» определил Леонард Эйлер (1707 – 1783) – великий математик, член Петербургской Академии наук, большую часть жизни проведший в России, по происхождению швейцарец.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25, \qquad x_3 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \approx 2{,}37,$$

$$x_4 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^4 \approx 2{,}44, \ x_5 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^5 \approx 2{,}488 \text{ и т.д.}$$

При помощи современных ЭВМ, это число вычислено с точностью до 590 знаков после запятой. Отдавая дань Эйлеру, это число называют числом ***«e»***: ***e*** =2,718281…

Итак по определению:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (5)$$