ОТКРЫТИЯ ГАУССА, АБЕЛЯ И ГАЛУА

ОСТРОВСКАЯ ЕЛИЗАВЕТА ДМИТРИЕВНА
СТУДЕНТКА ГРУППЫ ЭПР-17А
НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: ПРАЯ В. С.

Карл Фридрих Гаусс

Труд Карла Гаусса «Арифметические исследования», опубликованный в 1801 г., ознаменовал рождение современной математики.

«АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ»

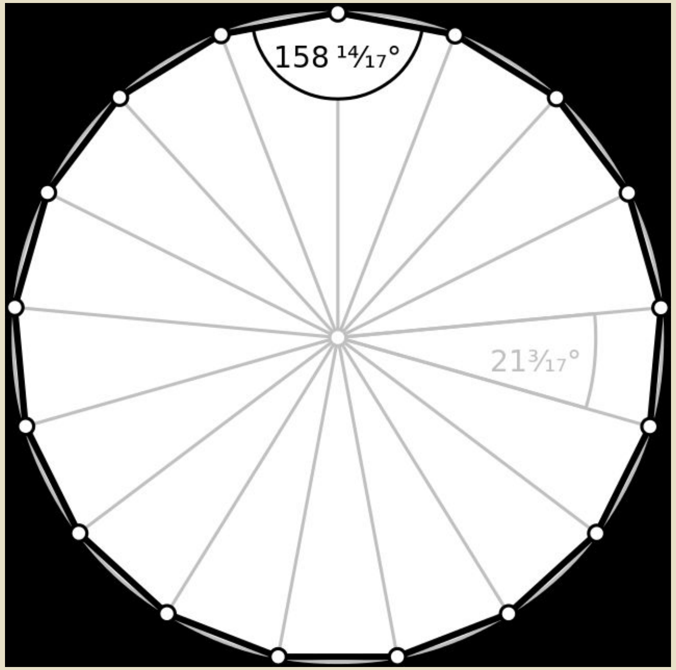
Гаусс исследовал задачу, над которой трудились ещё математики Древней Греции: какое число сторон должен иметь правильный многоугольник, чтобы его можно было построить с помощью циркуля и линейки?

В марте 1769 г. Гаусс сделал очень важную запись в дневнике. Ему удалось доказать, что с помощью циркуля и линейки строится правильный 17-угольник.

Теорема

- В «Арифметических исследованиях» Гаусс сформулировал теорему: если n – простое число и $n - 1 = p1p2 \ldots pk$ есть разложение числа $n - 1$ на простые множители, то решение уравнения $xn - 1 = 0$ сводится к решению k уравнений степеней $p1$, $p2$ … pk. В частности, если $n - 1 = 2m$, уравнение $xn - 1 = 0$ сводится к цепочке квадратных уравнений. [1]

ПРИМЕР



$x5 – 1 = (x – 1)(x4 + x3 + x2 + x) = 0$,

откуда $x – 1 = 0$ или $x4+x3+x2+x+1=0$

Последнее уравнение разделим на x2: $x2+x+1+1x+1x2=0$.

Произведем замену

$z=x+1x$ (1)

И заметив, что $z2=x2+1x2+2$,

Получим для z уравнение $z2+z−1=0$,

А для x из (1) – уравнение $x2−zx+1=0$.

Решение уравнения $x5−1=0$ сведено к решению двух квадратных уравнений и одного линейного.

Уравнение $x17−1=0$ (т. е. $n−1=24$) сводится к четырём квадратным уравнениям, и, следовательно, правильный 17-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки. Гаусс доказал, что в том случае, когда разложение числа $n−1$ содержит множители, отличные от 2, уравнение $xn−1=0$ нельзя свести к цепочке квадратных уравнений. А значит, невозможно деление окружности на 7, 11, 13, 19 частей.

Жозеф Луи Лагранж

- Жозеф Лангранжв работе «Размышления об алгебраическом решении уравнений» критически пересмотрел все существующие методы решения уравнений первых четырёх степеней, чтобы понять, почему ни один из них не годится для уравнений пятой степени. Лагранж впервые рассматривал группу подстановок корней уравнения, указав, что теория подстановок является «истинной метафизикой решения уравнений».

Нильс Хенрик Абель

- В 1824-1826 гг. молодой норвежский учёный Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829гг.) доказал, что общей формулы для решения уравнений степени $n \geq 5$ не существует. При этом некоторые уравнения могу быть решены в радикалах, а другие нет.
- В 1829 г., незадолго до своей смерти, Абель опубликовал «Мемуар об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений». Ныне их называют абелевыми уравнениями.

ПРИМЕР

- Если уравнение $x5+ux+v=0$ (2) приводимо, то оно сводится к уравнениям меньших x степеней и потому решается в радикалах. Если же это уравнение приводимо, то его группа Галуа либо содержит группу $A5$ (и поэтому неразрешима), либо сопряжена некоторой подгруппе метациклической группы (и поэтому разрешима).
- Если многочлен $(y3-5\ uy3+15u2y+5u3)2-Dy=0$ (3), где D – это дискриминант многочлена, умноженный на y, имеет кратный корень, то уравнение (3) решается в радикалах.

Эварист Галуа

- Развивая идеи Лагранжа, Гаусса и Абеля, Эварист Галуа поставил и блестяще решил задачу о том, как по виду уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$ определить, решается ли оно в радикалах (т.е. существует ли формула корней данного уравнения). Для этого он ввёл понятия поля и группы подстановок корней уравнения, «не меняющих правильности рациональных соотношений между корнями», ставшими основными в теории Галуа.

ПРИМЕР

- Рассмотрим многочлен $(x2-5)2-24$
- Его корни: a:$\sqrt{}2+\sqrt{}3$, $b=\sqrt{}2-\sqrt{}3$, $C=-\sqrt{}2+\sqrt{}3$, $d=-\sqrt{}2-\sqrt{}3$.
- Существует 4!=24 различных перестановки корней этого уравнения, но не все они являются симметриями. Элементы группы Галуа должны сохранять любые алгебраические уравнения с рациональными коэффициентами.
- Одно из таких уравнений — $a+d=0$. Поскольку $a+c\neq 0$, перестановка $a\to a,b\to b$, $c\to c,d\to c$ не входит в группу Галуа.
- Кроме того, можно заметить, что$(a+b)2=8$, но$(a+c)2=12$. Поэтому перестановка $a\to a,b\to c,c\to b,d\to d$ не входит в группу.
- Окончательно можно получить, что группа Галуа многочлена состоит из четырёх перестановок:

$(a,b,c,d)\to(a,b,c,d)$

$(\mathrm{a}, \mathrm{b},c,d)\to(c,d,a,b)$

$(\mathrm{a}, \mathrm{b},c,d)\to(\mathrm{b},a,d,c)$

$(\mathrm{a}, \mathrm{b},c,d)\to(d,c, \mathrm{b}, \mathrm{a})$ и является четверной группой Клейна. [4]

ВЫВОД

- Благодаря идеям и открытиям Гаусса, Абеля и Галуа открылся новый раздел алгебры – теория групп. Она получила распространение в анализе дифференциальных уравнений, в кристаллографии, в физике, в геометрии.

Список литературы

- 1. Дж. Литлвуд. Математическая смесь. — М.: Наука, 1990. — С. 43. — ISBN 5-02-014332-4.
- 2. http://www.wikiwand.com/ru/Правильный_семнадцатиугольник
- 3. Яков Перельман. Занимательная геометрия – 2008, С. 240
- 4. Эмиль Артин. Теория Галуа. / Пер. с англ. А. В. Самохина. — 2-е изд. стереотипное. — М.: МЦНМО, 2008. — 66 с. — (Классические монографии: математика). — ISBN 978-5-94057-062-2.