Системы счисления, основные понятия математической логики

Классификация систем счисления, переход от одной системы к другой, логические операции

Системы счисления

Обозначим границу между числом и цифрой.

Число — это абстрактная мера количества, **цифра** — это знак для записи числа.

Цифры бывают разные, самыми распространёнными являются арабские цифры, представляемые знаками от нуля (0) до девяти (9); менее распространены римские цифры, их можно встретить на циферблате часов или в обозначении века (XIX век).

Существует множество способов записи чисел с помощью цифр. Эти способы подразделяются на три части:

- позиционные системы счисления;
- смешанные системы счисления;
- непозиционные системы счисления.

Смешанные и непозиционные системы счисления

- В **смешанной системе счисления** каждое число *x* представляется как линейная комбинация.

Примерами смешанной системы счисления служат:

1. календарное представление времени в виде количества лет, месяцев и дней;
2. расчет при помощи денежных знаков.

- В **непозиционных системах счисления** величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе.

Каноническим примером непозиционной системы счисления является римская, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:
I обозначает 1, V — 5, X — 10, L — 50, C — 100, D — 500, M — 1000.
Для записи чисел в римской системе используются два правила:

1) каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него;
2) каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к нему.

Например, III = 1 + 1 + 1 = 3, здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.

Позиционные системы счисления

В позиционных системах счисления один и тот же числовой знакВ позиционных системах счисления один и тот же числовой знак (цифраВ позиционных системах счисления один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен.

Наиболее распространенными в настоящее время позиционными системами являются:

- 1 — единичная система счисления (как позиционная, может и не рассматриваться: зарубки, узелки «на память» и др.);
- 2 — двоичная2 — двоичная (в дискретной математике2 — двоичная (в дискретной математике, информатике2 — двоичная (в дискретной математике, информатике, программировании);
- 3 — троичная система счисления (обладает наибольшей плотностью записи информации);
- 4, 8 — четверичная, восьмеричная (системы счисления, применяемые в вычислительной технике);
- 10 — десятичная система счисления (возникновение которой связано со счётом на пальцах);
- 12 — двенадцатеричная система счисления (счёт дюжинами);
- 16 — шестнадцатеричная16 — шестнадцатеричная (наиболее часто используется в программировании16 — шестнадцатеричная (наиболее часто используется в программировании, а также в шрифтах);
- 60 — шестидесятеричная60 — шестидесятеричная (единицы измерения времени, измерение угловых координат и, в частности, географической долготы и, в частности, географической долготы и широты).

Основные понятия позиционных систем счисления

Каждая позиционная система счисления определяется некоторым **числом** f > 1 (**основание системы счисления**) таким, что f единиц в каждом разряде объединяется в одну единицу следующего по старшинству разряда.

Целое число *x* в f-ричной системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа f:

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

где a_k— это целые числа, называемые **цифрами**, удовлетворяющие неравенству: $0 \le a_k \le f - 1$

Каждая степень f^k в такой записи называется **разрядом**.

Когда все цифры представляются в виде уникальных письменных знаков, число *x* записывают в виде последовательности его цифр, перечисляемых по убыванию старшинства разрядов слева направо: $x = a_n a_{n-1} ... a_0$

Например, число *тысяча сорок пять* представляется в десятичной системе счисления в виде: $1045 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Переход из одной системы счисления в другую

Любое число в позиционной системе счисления можно представить в виде:

$$a_n \cdot f^n + a_{n-1} \cdot f^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot f^1 + a_0 \cdot f^0$$

где f – основание системы счисления.

Если число поделить на f, то в остатке от деления получится a_0

Продолжая деление и записывая остатки, можно осуществить переход в другую систему счисления.

Пример: Получим представление числа 25 в двоичной системе счисления:

- 25 / 2 = 12, остаток 1;
- 12 / 2 = 6, остаток 0;
- 6 / 2 = 3, остаток 0;
- 3 / 2 = 1, остаток 1;
- 1 / 2 = 0, остаток 1.

Получили число: 11001_2

Представим число 25 в троичной системе счисления:

- 25 / 3 = 8, остаток 1;
- 8 / 3 = 2, остаток 2;
- 2 / 3 = 0, остаток 2.

Получили число: 221_3

Восьмеричная система счисления:

- 25 / 8 = 3, остаток 1;
- 3 / 8 = 0, остаток 3.

Результат: 31_8

Десятичная система счисления:

- 25 / 10 = 2, остаток 5;
- 2 / 10 = 0, остаток 2.

Результат: 25_{10}.

Таблица переходов между системами счисления

n	2^n	n_2	n_8	n_{16}
0	1	0	0	0
1	2	1	1	1
2	4	10	2	2
3	8	11	3	3
4	16	100	4	4
5	32	101	5	5
6	64	110	6	6
7	128	111	7	7
8	256	1000	10	8
9	512	1001	11	9
10	1024	1010	12	A
11	2048	1011	13	B
12	4096	1100	14	C
13	8192	1101	15	D
14	16384	1110	16	E
15	32768	1111	17	F

Бинарная логика

Высказывание - это любое утверждение, относительно которого можно сказать истинно оно или ложно, т.е. соответствует оно действительности или нет.

По своей сути высказывания являются двоичными объектами и поэтому часто истинному значению высказывания ставят в соответствие 1, а ложному - 0. А Например, запись А = 1 означает, что высказывание А истинно.

Высказывания могут быть простыми и сложными. Простые соответствуют алгебраическим переменным, а сложные являются аналогом алгебраических функций. Функции могут получаться путем объединения переменных с помощью логических действий или операций.

При записи тех или иных логических выражений используется специальный язык, который принят в математической логике. Основоположником математической логики является великий немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1716 гг.). Он сделал попытку построить универсальный язык, с помощью которого споры между людьми можно было бы разрешать посредством вычислений. На основании работ Лейбница ирландский математик Джордж Буль создал новую науку - математическую логику, - которая в отличие от обычной алгебры оперирует не числами, а высказываниями. В честь Д. Буля логические переменные в языках программирования называются булевскими.

Основные логические операции

Основой цифровой техники служат три логические операции, лежащие в основе всех выводов компьютера. Иногда эти операции И, ИЛИ, НЕ называют "тремя китами машинной логики".

- **Отрицание (инверсия)**, от латинского *inversio -переворачиваю*:
  - соответствует частице НЕ, словосочетанию НЕВЕРНО, ЧТО:
  - обозначение: не А, $\bar{A}$, -А

  Результат отрицания всегда противоположен значению аргумента.

  Логическая операция НЕ является унарной, т.е. имеет всего один операнд.

  Бинарные операции представляют собой результаты действий над двумя логическими величинами.
- **Логическое сложение (дизъюнкция)**, от латинского *disjunctio - различаю*:
  - соответствует союзу ИЛИ;
  - обозначение: +, или, or, V.
- **Логическое умножение (конъюнкция)**, от латинского *conjunctio -связываю*:
  - соответствует союзу И;
  - обозначение: ×, •, &, и , and, Λ.

Другие логические операции: и**мпликация** (→; Если, то; Из … следует…),
эквиваленция (↔; Тогда и только тогда; Необходимо и достаточно),
исключение (не ↔, Xor; Не так, так эдак).

Логические основы ЭВМ

Таблица истинности.

X	Y	Not X	X or Y	X and Y	X → Y	X ↔ Y	X xor Y
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Операции И, ИЛИ, НЕ образуют полную систему логических операций, из которой можно построить любое сколь угодно сложное логическое выражение.

На практике по технологическим причинам в качестве основного логического элемента используется элемент И-НЕ. На базе элементов И-НЕ могут быть скомпонованы все базовые логические элементы (И, ИЛИ, НЕ), а значит и любые другие, более сложные.

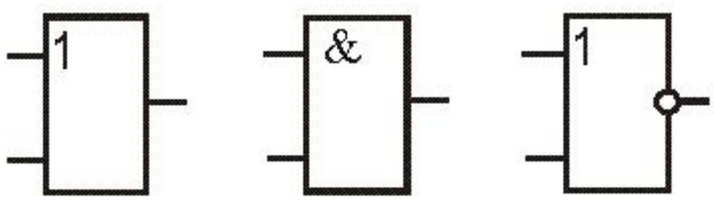

Рис. 1. Логические элементы И, ИЛИ, НЕ в схемном представлении