

# **ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ**

# **Построение таблиц истинности**

# Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать  $n$  - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки:  $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

# Приоритет логических операций

1. Действия в скобках
2. Инверсия
3. Конъюнкция (  $\&$  )
4. Дизъюнкция (  $\vee$  )
5. Сложение по модулю 2 (  $\oplus$  )
6. Импликация (  $\rightarrow$  )
7. Эквивалентность (  $\sim$  )

# Приоритет логических операций

Пример.

$$\neg A \wedge B \vee C \wedge D = ((\neg A) \wedge B) \vee (C \wedge D).$$
$$- A \bullet B + C \bullet D = ((- A) \bullet B) + (C \bullet D)$$

| приоритет логических операций   | приоритет для операций с числами |
|---|----------------------------------|
| 1) инверсия   | 1) отрицание                     |
| 2) конъюнкция   | 2) умножение                     |
| 3) дизъюнкция   | 3) сложение                      |
| Операции одного приоритета выполняются слева направо. Для изменения порядка действий используются скобки. |                                  |
|   |                                  |
|   |                                  |

# Решение задач

---

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ | $F$ |
|-----|-----|------------|-----------|------------------|-----|
| 0   | 0   | 0          |           |                  |     |
| 0   | 1   | 1          |           |                  |     |
| 1   | 0   | 1          |           |                  |     |
| 1   | 1   | 1          |           |                  |     |

# Решение задач

---

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ | $F$ |
|-----|-----|------------|-----------|------------------|-----|
| 0   | 0   | 0          | 1         |                  |     |
| 0   | 1   | 1          | 1         |                  |     |
| 1   | 0   | 1          | 0         |                  |     |
| 1   | 1   | 1          | 0         |                  |     |

# Решение задач

---

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ | $F$ |
|-----|-----|------------|-----------|------------------|-----|
| 0   | 0   | 0          | 1         | 1                |     |
| 0   | 1   | 1          | 1         | 1                |     |
| 1   | 0   | 1          | 0         | 0                |     |
| 1   | 1   | 1          | 0         | 1                |     |



# Решение задач

---

Составить таблицу истинности для формулы

$$F(A, B) = (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B)$$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $\bar{A}$ | $\bar{A} \vee B$ | $F$ |
|-----|-----|------------|-----------|------------------|-----|
| 0   | 0   | 0          | 1         | 1                | 0   |
| 0   | 1   | 1          | 1         | 1                | 1   |
| 1   | 0   | 1          | 0         | 0                | 0   |
| 1   | 1   | 1          | 0         | 1                | 1   |

# Свойства логических операций

# Свойства логических операций

## Законы алгебры-логики

Переместительный

$$A \& B = B \& A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Сочетательный

$$(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Распределительный

$$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$$

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$$

Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{A}} = A$$

# Свойства логических операций

## Законы алгебры-логики

Закон исключения  
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций  
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей  
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

# Логические законы и тождества

## Тождества

### Логического сложения

$$1) A \vee 0 = A$$

$$2) A \vee 1 = 1$$

$$3) A \vee A = A$$

$$4) A \vee \neg A = 1$$

### Логического умножения

$$1) A \wedge 0 = 0$$

$$2) A \wedge 1 = A$$

$$3) A \wedge A = A$$

$$4) A \wedge \neg A = 0$$

# Логические законы и тождества

## Законы

1)  $A=A$  (Закон тождества)

2)  $A \wedge (A \vee B)=A$  (Закон поглощения)

**Задание:** доказать справедливость данного закона (раскрыть скобки с помощью законов распределения и повторения)

3)  $A \vee (A \wedge B)=A$  (Закон поглощения)

**Задание:** доказать справедливость данного закона (раскрыть скобки с помощью законов распределения и повторения)

# Доказательство закона с помощью таблицы

## ИСТИННОСТИ

Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

| A | B | C | B&C | $A \vee (B \& C)$ | $A \vee B$ | $A \vee C$ | $(A \vee B) \& (A \vee C)$ |
|---|---|---|-----|-------------------|------------|------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0   | 0                 | 0          | 0          | 0                          |
| 0 | 0 | 1 | 0   | 0                 | 0          | 1          | 0                          |
| 0 | 1 | 0 | 0   | 0                 | 1          | 0          | 0                          |
| 0 | 1 | 1 | 1   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 0 | 0 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 0 | 1 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 1 | 0 | 0   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |
| 1 | 1 | 1 | 1   | 1                 | 1          | 1          | 1                          |

Учитывая, что  $(A \vee (B \& C)) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$  для всех значений переменных, доказывает распределительный закон.

# **Решение логических задач**



# Решение логических задач

**Задача.** Коля, Вася и Серёжа гостили летом у бабушки. Однажды один из мальчиков нечаянно разбил любимую бабушкину вазу.

На вопрос, кто разбил вазу, они дали такие ответы:

**Серёжа:** 1) Я не разбивал. 2) Вася не разбивал.

**Вася:** 3) Серёжа не разбивал. 4) Вазу разбил Коля.

**Коля:** 5) Я не разбивал. 6) Вазу разбил Серёжа.

Бабушка знала, что один из её внуков (правдивый), оба раза сказал правду; второй (шутник) оба раза сказал неправду; третий (хитрец) один раз сказал правду, а другой раз - неправду. Назовите имена правдивого, шутника и хитреца.

Кто из внуков разбил вазу?



**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

| К | В | С | Утверждение Серёжи |           | Утверждение Васи |   | Утверждение Коли |   |
|---|---|---|--------------------|-----------|------------------|---|------------------|---|
|   |   |   | $\bar{C}$          | $\bar{V}$ | $\bar{C}$        | К | $\bar{K}$        | С |
| 0 | 0 | 1 |                    |           |                  |   |                  |   |
| 0 | 1 | 0 |                    |           |                  |   |                  |   |
| 1 | 0 | 0 |                    |           |                  |   |                  |   |

**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

| K | V | C | Утверждение Серёжи |                | Утверждение Васи |   | Утверждение Коли |   |
|---|---|---|--------------------|----------------|------------------|---|------------------|---|
|   |   |   | $\overline{C}$     | $\overline{V}$ | $\overline{C}$   | K | $\overline{K}$   | C |
| 0 | 0 | 1 | 0                  | 1              |                  |   |                  |   |
| 0 | 1 | 0 | 1                  | 0              |                  |   |                  |   |
| 1 | 0 | 0 | 1                  | 1              |                  |   |                  |   |

**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

| K | V | C | Утверждение Серёжи |                | Утверждение Васи |   | Утверждение Коли |   |
|---|---|---|--------------------|----------------|------------------|---|------------------|---|
|   |   |   | $\overline{C}$     | $\overline{V}$ | $\overline{C}$   | K | $\overline{K}$   | C |
| 0 | 0 | 1 | 0                  | 1              | 0                | 0 |                  |   |
| 0 | 1 | 0 | 1                  | 0              | 1                | 0 |                  |   |
| 1 | 0 | 0 | 1                  | 1              | 1                | 1 |                  |   |

**Решение.** Пусть  $K$  = «Коля разбил вазу»,  
 $V$  = «Вася разбил вазу»,  
 $C$  = «Серёжа разбил вазу».

Представим в таблице истинности высказывания каждого мальчика. Так как ваза разбита одним внуком, составим не всю таблицу, а только её фрагмент, содержащий наборы входных переменных: 001, 010, 100.

| K | V | C | Утверждение Серёжи |                | Утверждение Васи |   | Утверждение Коли |   |
|---|---|---|--------------------|----------------|------------------|---|------------------|---|
|   |   |   | $\overline{C}$     | $\overline{V}$ | $\overline{C}$   | K | $\overline{K}$   | C |
| 0 | 0 | 1 | 0                  | 1              | 0                | 0 | 1                | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1                  | 0              | 1                | 0 | 1                | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1                  | 1              | 1                | 1 | 0                | 0 |

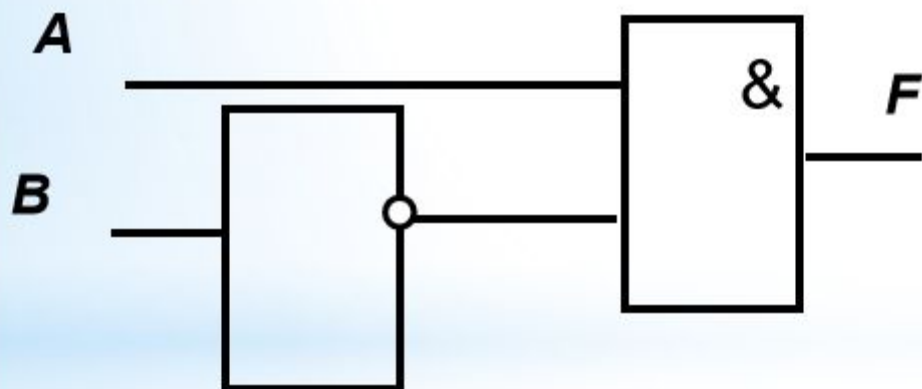
Исходя из того, что знает о внуках бабушка, следует искать в таблице строки, содержащие в каком-либо порядке три комбинации значений: 00, 11, 01 (или 10). Это первая строка.

Вазу разбил Серёжа, он - хитрец. Шутником оказался Вася. Имя правдивого внука - Коля.

# Логические элементы

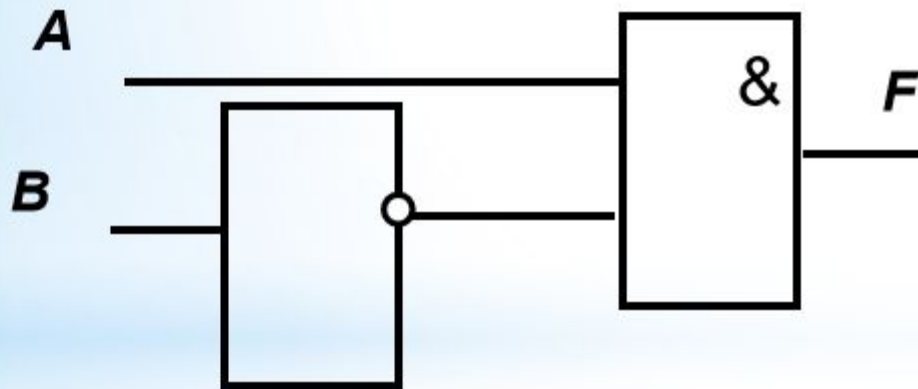
# Анализ электронной схемы

Какой сигнал должен быть на выходе при каждом возможном наборе сигналов на входах?



# Анализ электронной схемы

**Решение.** Все возможные комбинации сигналов на входах **A** и **B** внесём в таблицу истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.

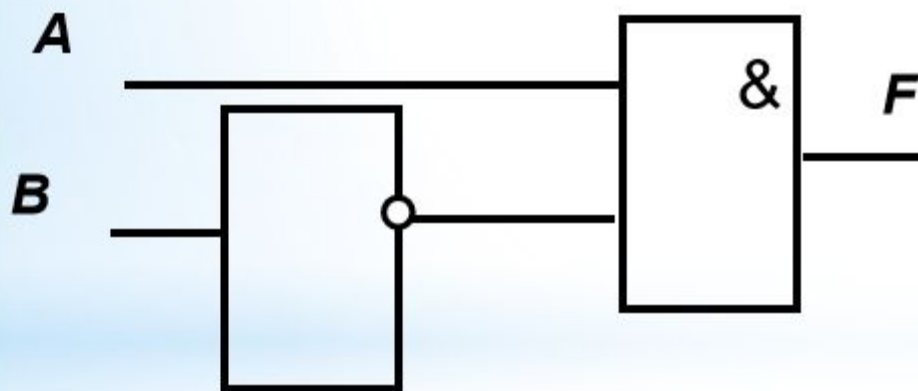


| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        |
| 0        | 1        | 0        |
| 1        | 0        | 1        |
| 1        | 1        | 0        |



# Анализ электронной схемы

**Решение.** Все возможные комбинации сигналов на входах **A** и **B** внесём в таблицу истинности. Проследим преобразование каждой пары сигналов при прохождении их через логические элементы и запишем полученный результат в таблицу. Заполненная таблица истинности полностью описывает рассматриваемую электронную схему.



| <b>A</b> | <b>B</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        |
| 0        | 1        | 0        |
| 1        | 0        | 1        |
| 1        | 1        | 0        |

В инвертор поступает сигнал от входа **B**.

В конъюнктор поступают сигналы от входа **A** и от инвертора. Таким образом,  $F = A \& B$ .

# Опорный конспект

*Высказывание – это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как истинное или ложное.*



*Приоритет выполнения логических операций:  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ .*