

Дипломная работа

Тема:

Факториальные кольца

Выполнила студентка 5 курса 4 группы дневного
отделения факультета математики Лаврухина
Светлана Сергеевна

Руководитель: доцент, кандидат физико-
математических наук Яшина Елена Юрьевна

Цель работы:

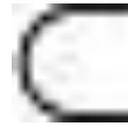
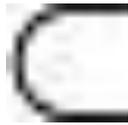
- Изучение классов колец, элементы которых раскладываются в произведение неприводимых элементов, и при этом такое разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей и умножения на обратимый элемент

Задачи работы:

- Изучение литературы по теме
- Систематизация материала
- Поиск примеров факториальных колец, которые иллюстрировали бы несовпадение классов колец с однозначным разложением на простые
- Поиск примеров колец, не являющихся факториальными
- Изложение всего изученного материала целостным текстом в едином ключе

Цепочка включений:

ЕВКЛИДОВЫ КОЛЬЦА



КОЛЬЦА

ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ



ЕВКЛИДОВО КОЛЬЦО

- – область целостности R , в котором каждому ненулевому элементу a сопоставлено целое неотрицательное число $g(a)$ (т.н. норма) со следующими свойствами:
- Для ненулевых элементов a и b справедливо:
 $g(a-b) \geq g(a)$.
- (Алгоритм деления.) Для любых двух элементов a , b , где a – ненулевой, существует представление $b = qa + r$, в котором r – нулевой элемент или $g(r) < g(a)$.

Примеры евклидовых колец

- Кольцо целых чисел \mathbf{Z}
- Кольцо целых гауссовых чисел $\mathbf{Z}[i]$
- Кольцо многочленов $\mathbf{P}[x]$

Кольцо главных идеалов

- – кольцо, в котором каждый идеал главный.
- **Идеал** – такое подкольцо I кольца A , которое вместе с любым своим элементом i содержит все «правые кратные» i -а и все «левые кратные» a - i для произвольного a из A (двухсторонний идеал).
- Идеал называется **порождённым множеством M** , если идеал I представляет собой пересечение всех идеалов, содержащих M
- **Главный идеал** – идеал, порождённый одним элементом a кольца A . Образующей главного идеала является сам элемент a .

Факториальное кольцо

- (кольцо с однозначным разложением на множители) – целостное кольцо, в котором каждый ненулевой элемент либо обратим, либо имеет однозначное разложение на неприводимые элементы.

Примеры для доказательства

- Кольцо многочленов от 2 переменных – факториальное, но не кольцо главных идеалов
- Кольцо целых алгебраических чисел квадратичного поля – кольцо главных идеалов, но не во всех случаях - евклидово

Квадратичное поле

- - алгебраическое числовое поле степени 2 над \mathbb{Q} .
- Числа поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеют вид $\alpha = x + y\sqrt{d}$, где x и y – рациональные.

Кольцо целых алг. чисел квадратичного поля

- любой идеал кольца целых алг. чисел – главный
⇔ кольцо целых алг. чисел факториально
- кольцо целых алг. чисел факториально
⇔ множество классов идеала кольца целых алг. чисел состоит из 1 элемента

Квадратичные поля с алгоритмом Евклида

- Мнимые квадратичные поля: дискриминант $-3, -4, -7, -8, -11$
- вещественные квадратичные поля: дискриминант $5, 8, 12, 3$

Состояние работы

Сделано:

- Цепочка включений
- Примеры несовпадения

Осталось сделать:

- Примеры нефакториальных колец
- Подробное рассмотрение колец целых алгебраических чисел в различных квадратичных полях
- Примеры колец главных идеалов, которые не евклидовы



Спасибо за внимание!

