

# Олимпиадная математика

## Занятие 2. Принцип Дирихле

# Важно!

---

- Принцип Дирихле – частный случай доказательства от противного.

# Задача

---

- В 2 клетках сидит 3 кролика.  
Докажите, что в какой-то клетке сидит не менее 2 кроликов.

# Задача

---

- В 2 клетках сидит 3 кролика.  
Докажите, что в какой-то клетке сидит не менее 2 кроликов.
- Доказательство. Допустим обратное: нет клетки, в которой сидит не менее 2 кроликов. Тогда во всех клетках сидит менее 2, т. е. не более 1 кролика. Так как клеток 2, то по теореме сложения неравенств получаем, что всего не более  $1 * 2 = 2$  кроликов. Противоречие, т.к. по условию в клетках 3 кролика.

# Теорема о сложении неравенств

---

- Если  $a > b$  и  $n$  – положительное, то  $a^n > b^n$ .

# Принцип Дирихле

---

- Если в  $N$  клетках сидят не менее  $N + 1$  кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.

# Принцип Дирихле

---

- Если в  $N$  клетках сидят не менее  $N + 1$  кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов.
- Доказательство. Допустим обратное: нет клетки, в которой сидит не менее 2 кроликов. Тогда во всех клетках сидит менее 2, т. е. не более 1 кролика. Так как клеток  $N$ , то по теореме сложения неравенств получаем, что всего не более  $1 * N = N$  кроликов. Противоречие, т.к. по условию в клетках  $N + 1$  кролика.

# Другой вариант принципа

---

- Если в  $N$  клетках сидит менее  $N$  зайцев, то найдется хотя бы одна пустая клетка.



# Обобщенный принцип Дирихле

---

- Если в  $N$  клетках сидят не менее  $kN + 1$  кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее  $k + 1$  кролик.