§2. Определители

1. Вспомогательные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Факториалом*** *числа n называют произведение натуральных чисел от* 1 *до n включительно, т. е.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

$$0! = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Расположение n различных чисел в любом порядке называется* ***перестановкой*** *этих чисел.*

Пусть дана некоторая перестановка n различных чисел

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Количество пар, образующих инверсию в перестановке,

пропустить 5 клеточек ***и инверсий в перестановке***.

Определение определителя

Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Построим произведения по следующему правилу:

из каждой строки и каждого столбца возьмем по одному элементу

$$a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot a_{3\alpha_3}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}$$

Таких произведений можно построить $n!$

ОПР. *Сумма $n!$ произведений каждое со своим знаком, зависящим от порядка чередования строк или столбцов, называется* ***определителем матрицы A*** (***определителем порядка n***).

обозначают $|\mathbf{A}|$, $\det\mathbf{A}$ или

$$|\,\mathbf{A}\,|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}(-1)^{k(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)}a_{1\alpha_1}\cdot a_{2\alpha_2}\cdot a_{3\alpha_3}\cdot\ldots\cdot a_{n\alpha_n}$$

Здесь $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ - перестановка

Здесь $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ - перестановка

Вычисление определителя

Определитель второго порядка. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений.

а) правило *треугольников*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - $$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

б) правило *Саррюса*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \qquad - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

пропустить 10 клеточек

Свойства определителей

1) *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.* $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|$

2) *При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.*

пропустить 10 клеточек

3) Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

пропустить 10 клеточек

4) *Если все элементы k-й строки определителя* $|\mathbf{A}|$ *являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей* $|\mathbf{A}_1|$ *и* $|\mathbf{A}_2|$: *у первого в k-ой строке первые слагаемые, у второго в k-ой строке - вторые слагаемые.*

пропустить 10 клеточек

-

Здесь $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ - перестановка

$$A = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$$

пропустить 10 клеточек

6) *Определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число* $\alpha \neq 0$.

7) *Если* **A** *и* **B** – *квадратные матрицы порядка* n , *то существует* **AB** *и* **BA**, *причем* $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{BA}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$.

пропустить 15 клеточек

Теорема Лапласа и ее следствие

Пусть **A** = (a_{ij}) – матрица размера $m \times n$.

Выберем в **A** произвольно k строк: $i_1, i_2, \ldots, i_k$

и k столбцов: $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов составим определитель M_k :

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Определитель M_k называют минором k-го порядка матрицы **A**.

Частные случаи:

а) любой элемент матрицы – минор первого порядка;

б) определитель квадратной матрицы порядка n – ее минор порядка n.

Определитель M_k^*, составленный из оставшихся элементов матрицы **A**, называется ***дополнительным минором к минору*** M_k.

пропустить 10 клеточек

Пусть **A** = (a_{ij}) – квадратная матрица порядка n.

Выберем в **A** минор первого порядка $M_{\text{k}} = |a_{ij}|$ (строка i, столбец j).

Вычеркнем из матрицы **A** строку i, столбец j.

Определитель M_k^*, - ***дополнительный минор элемента*** a_{ij} (его обозначают M_{ij}).

Число $\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$ называется ***алгебраическим дополнением элемента a_{ij}***.

пропустить 10 клеточек

СЛЕДСТВИЕ 1 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.*

$$\boxed{|\mathbf{A}|=a_{i1}\mathrm{A}_{i1}+a_{i2}\mathrm{A}_{i2}+\ldots+a_{in}\mathrm{A}_{in}}$$

разложение определителя по строке

$$\boxed{|\mathbf{A}|=a_{1j}\mathrm{A}_{1j}+a_{2j}\mathrm{A}_{2j}+\ldots+a_{nj}\mathrm{A}_{nj}}$$

по столбцу

СЛЕДСТВИЕ 2 (теоремы Лапласа). *Сумма произведений элементов i-й строки (столбца) определителя на алгебраический дополнения соответствующих элементов k-й строки (столбца) этого определителя равна нулю*. Т.е.

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\ldots+a_{nj}A_{nk}=0$$