«Численные методы механики сплошных сред. Метод граничных интегральных уравнений для задач гидромеханики»

Список литературы

- Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. Учебное пособие. Москва: Наука. 1984.
- Белоцерковский С. М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. Москва: Наука. 1985.
- Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М. – Л.: ГИФМЛ. 1962.
- Верлань А.Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка . 1986.
- Дербасова В.А. Решение уравнений Лапласа методом граничных интегральных уравнений. Москва: МГУ. 1985.
- Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. Москва: Наука. 1975.
- Бернадинер М. Г., Ентов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. Москва: Наука. 1975.
- Данилов В. Л., Кац Р. М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкости в пористой среде. Москва: Наука. 1980.

1. Общие сведения о краевых задачах для уравнения Лапласа

Определение 1. Гармонической в области Ω функцией называется дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа $\Delta p = 0$.

Обычно при рассмотрении конкретного физического процесса необходимо из множества решений уравнения, описывающего общий физический закон, выделить единственное, для этого надо подчинить решение дополнительным условиям, или, как говорят, сформулировать задачу математической физики. На практике для уравнения Лапласа часто приходят к следующим трем видам линейных краевых условий на границе рассматриваемой области $\partial\Omega$:

$$p = \mu \quad , \text{на контуре}\, \partial\Omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mu, \text{на контуре } \partial\Omega$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} + \sigma p = \mu, \text{на контуре } \partial\Omega$$

В качестве механического примера рассмотрим процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Установившаяся фильтрация несжимаемой ($\rho=const$) жидкости в однородной пористой среде описывается системой уравнений закона Дарси и неразрывности, выражающим условие сохранения массы жидкости при фильтрации, которые в данном случае имеют вид

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} grad(p), \quad div\,\vec{v} = 0.$$

где p – давление; μ – гидродинамическая вязкость; k – проницаемость (имеет размерность площади, не зависит от свойств жидкости и является чисто геометрической характеристикой), $\boldsymbol{v}$ – вектор скорости фильтрации.

Подставляя закон Дарси в уравнение неразрывности, получим линейное эллиптическое уравнение 2-го порядка относительно давления p:

$$div\left(\frac{k}{\mu} grad(p)\right) = 0 \quad \textbf{(1.1)}$$

Из формулы (1.1) видно, что если проницаемость k и гидродинамическая вязкость среды μ - постоянные величины, то последнее уравнение сводится к уравнению Лапласа $\Delta p = 0$; в противном случае уравнение (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{\partial}{\partial y}\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}p + \frac{\partial}{\partial z}\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}p = 0 .$$

Кроме этого, давление p должно удовлетворять традиционным краевым условиям на заранее заданных границах фильтрационного потока:

- Условие непротекания (на границах непроницаемых включений) $\dfrac{\partial p}{\partial n} = 0,$
- Условие заданного постоянного давления (обычно формулируется на контурах питания) $p = p_0$,

- Условие сопряжения (на границе раздела областей с различной проницаемостью)

$$p^{+} = p^{-}, \quad \left[k_1 \frac{\partial p(x,y)}{\partial n_1}\right]^{+} = \left[k_2 \frac{\partial p(x,y)}{\partial n_1}\right]^{-}$$

- Условие на скважинах (источниках и стоках):

$$-\frac{k}{\mu}\lim_{\gamma_j \to 0} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\gamma_j = Q_j$$

Здесь $\partial\Omega_1$ - контур скачка проницаемости, γ_j - контур, охватывающий *j*-тую скважину с дебитом Q_j, расположенную в точке (x_j, y_j) , $n_i\,(n_j),-$ внутренняя нормаль к контуру $\partial\Omega_i\,(\gamma_j)$, k_1, k_2 $-$заданные постоянные проницаемости областей $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ и Ω_2 соответственно. Индексами плюс и минус отмечены предельные значения давления, его нормальной производной и проницаемости среды при приближении к границе $\partial\Omega_1$ изнутри и снаружи соответственно.

Некоторые известные аналитические решения для простейших потоков.

А) **Однородный поток** с вектором скорости $V(u,v)$:

$$\varphi(x,y) = ux + vy, \psi(x,y) = -vx + uy$$

Б) **Источник (сток)** в начале координат с расходом (дебитом) Q:

$$\varphi(r,\vartheta) = Q\ln r/(2\pi), \psi(r,\vartheta) = Q\vartheta/(2\pi), \quad r,\vartheta$$ - полярные координаты

Применительно к теории фильтрации в пористой среде. Распределение давления в бесконечном по простиранию плоском пористом пласте вскрытом системой m нагнетательных и добывающих скважин с координатами (x_i, y_i).

$$p(x,y) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i \mu}{2\pi k_i} \ln\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$$

где Q_i - интенсивность работы i-ой скважины k_i – проницаемость в точке (x_i, y_i).

В) **Вихрь**, изолированный в начале координат с циркуляцией Г:

$$\psi(r,\vartheta) = -\Gamma\ln r/(2\pi), \varphi(r,\vartheta) = \Gamma\vartheta/(2\pi),$$

Г**) Диполь** в начале координат с моментом М и осью, направленной вдоль оси Ох:

$$\varphi(x,y) = Mx/2\pi(x^2+y^2), \psi(x,y) = -My/2\pi(x^2+y^2)$$

Д) **Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра** радиуса *a* однородным потоком скорости *u* вдоль оси Ох

$$\varphi(r,\vartheta) = u(r + a^2/r^2)\cos\vartheta, \psi(r,\vartheta) = u(r - a^2/r^2)\sin\vartheta$$

2. Потенциалы, их основные свойства. Решение краевых задач для уравнения Лапласа сведением к интегральным уравнениям.

Определение 2. Пусть существует некоторая гладкая плоская кривая $\partial\Omega$, на которой сосредоточены точечные источники с плотностью $\rho(\zeta,\eta)$, тогда интеграл

$$V(x,y)=\int\limits_{\partial\Omega}\rho(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}d\sigma$$

называется потенциалом простого слоя плотности ρ, сосредоточенного на контуре $\partial\Omega$. Здесь (ξ, η) – точка, принадлежащая контуру $\partial\Omega$; (x, y) – произвольная точка в пространстве R^2.

Основные свойства потенциала простого слоя.

- Потенциал простого слоя определен всюду в R^2.
- Потенциал простого слоя непрерывен всюду в R^2.
- Потенциал простого слоя является гармонической функцией, кроме точек образующей кривой $\partial\Omega$.
- Нормальная производная потенциала простого слоя терпит разрыв 1 рода в точках поверхности $\partial\Omega$ со скачком $2\pi\rho$.

$$\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]^{+} = \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] - \pi\rho \qquad , \qquad \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]^{-} = \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right] + \pi\rho ,$$

Здесь n – внешняя нормаль к линии $\partial\Omega$, Индексами плюс и минус отмечены предельные значения нормальной производной потенциала простого слоя при приближении к границе $\partial\Omega$ снаружи и изнутри соответственно.

Определение 3. Пусть существует некоторая плоская кривая $\partial\Omega$, на которой распределены диполи с плотностью $\nu(\zeta,\eta)$, тогда интеграл

$$W(x,y)=\int_{\partial\Omega}\nu(\xi,\eta)\ \partial\big/_{\partial\bar{n}}(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}})d\sigma$$

называется потенциалом двойного слоя плотности $\nu(\zeta,\eta)$, сосредоточенной на контуре $\partial\Omega$. Здесь (ξ, η) – точка, принадлежащая контуру $\partial\Omega$; (x, y) – произвольная точка в пространстве R^2, $\bar{n}$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке (ξ, η).

Основные свойства потенциала двойного слоя.

- Потенциал двойного слоя определен всюду в R^2.
- Для точек не принадлежащих $\partial\Omega$ потенциал двойного слоя - гармоническая функция.
- Если $\nu(\zeta,\eta)$- непрерывная функция на $\partial\Omega$, то W имеет разрыв 1 рода в точках $\partial\Omega$ со скачком $2\pi\nu$:

$$[W]^- = [W]\ -\pi\nu\ ,\qquad [W]^+ = [W]\ +\pi\nu$$

Сведение краевых задач для гармонических функций к интегральным уравнениям.

Общий подход к решению краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений.

Решение краевых задач ищется в виде суперпозиции потенциалов с априори неизвестными плотностями, сосредоточенными на контурах с заданными краевыми условиями. На кривых с граничными условиями первого рода обычно размещают двойной слой, для кривых с условиями второго рода используется простой слой. Подстановка суперпозиции потенциалов в граничные условия определяют систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей слоев.

Используя теоремы о скачках, можно решение краевых задач для уравнения Лапласа свести к решению интегральных уравнений. Рассмотрим это на примере внешней задачи Неймана: требуется найти функцию p, такую, что:

$$\Delta p = 0 \quad \textit{в области } \Omega \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\frac{\partial p^{+}}{\partial n} = \mu, \quad \textit{на контуре } \partial\Omega \qquad \textbf{(2.2)}$$

Будем искать решение задачи (2.1)-(2.2) в виде потенциала простого слоя, плотность которого следует определить:

$$p(x,y) = \int_{\partial\Omega} \rho(\xi,\eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \, d\sigma$$

Подставляя это представление в граничное условие (2.2), получим интегральное уравнение для нахождения плотности

$$\int_{\partial\Omega} \rho(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \partial\sigma - \pi\rho(x,y) = \mu$$

Предположим, что конфигурация контура $\partial\Omega$ определяется однозначной функцией в полярных координатах $r=g(\theta)$, где $0\le \theta \le 2\pi$, тогда последнее уравнение приобретает вид:

$$-\pi\rho(\theta)+\int_0^{2\pi}\frac{\rho(\alpha)N\left[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)\right]}{\sqrt{g^2(\theta)+g'^2(\theta)}}\cdot\sqrt{g^2(\alpha)+g'^2(\alpha)}\,d\alpha=\mu$$

Здесь $N\left[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)\right]=\dfrac{g^2(\theta)-g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta-\alpha)-g'(\theta)g(\alpha)\sin(\theta-\alpha)}{g^2(\theta)-2g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta-\alpha)+g^2(\alpha)}$

Отметим при этом, что для любой функции $g(\theta)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, ядро $N(\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta))$ – непрерывная функция своих аргументов.

Упражнение 1. Самостоятельно получить явный вид ядра $N\left[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)\right]$.

Упражнение 2. Доказать непрерывность ядра $N\left[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)\right]$.

$$\lim_{\alpha\to\theta}N(a,\theta,g(\alpha),g(\theta))=\frac{g^2(\theta)-2g'^2(\theta)-g(\theta)g''(\theta)}{g^2(\theta)+g'^2(\theta)}.$$

Упражнение 3. Получить интегральное уравнение для краевой задачи

$$\Delta p = 0 \quad \textit{в области } \Omega$$

$$\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right| = G, \quad \textit{на контуре } \partial\Omega$$

где s – касательная к контуру $\partial\Omega$. Исследовать особенность полученного ядра.

Ответ: $\left|\int\limits_{\partial\Omega} \rho(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial s}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\partial\sigma\right| = G$ или

$$\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(\alpha)K[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)]}{\sqrt{g^2(\theta)+g'^2(\theta)}}\times\sqrt{g^2(\alpha)+g'^2(\alpha)}\right| = G$$

Здесь $K[\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta)] = \dfrac{(g(\alpha)\cos(\theta-\alpha)-g(\theta))g'(\theta)-g(\alpha)g(\theta)\sin(\theta-\alpha)}{g^2(\theta)-2g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta-\alpha)+g^2(\alpha)}$.

Заметим, что ядро *K(α, θ, g(α), g(θ))* при *α=θ* имеет полюс первого порядка. Действительно, если ввести новую функцию

$K^*(\alpha,\theta,g(a),g(\theta)) = K(\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta))\cdot\dfrac{1}{2}ctg(\theta-\alpha)$, то по правилу Лапиталя нетрудно показать, что

$$\lim_{\alpha\to\theta}K^*(a,\theta,g(\alpha),g(\theta)) = \frac{g'(\theta)[g''(\theta)+g(\theta)]}{g^2(\theta)+g'^2(\theta)},$$

т.е. $K^*(\alpha,\theta,g(\alpha),g(\theta))$ - ограниченная функция.

3. Некоторые сведения из теории интегральных уравнений. Квадратурный метод численного решения интегральных уравнений.

Определение 4. Будем называть интегральными такие функциональные уравнения, которые содержат интегральные преобразования над искомой функцией.

Например, $g(x)y(x)-\lambda\int\limits_{\Omega}K(x,s)y(s)ds = f(x), x\in Q$ **(3.1)**

- линейное интегральное уравнение относительно искомой функции *y(s)*, областью определения Ω (если Ω – переменно, то (3.1) – уравнение Вольтерра, если Ω – постоянно, то (3.1) – уравнение Фредгольма). Здесь *K(x,s)* – ядро ИУ, *f(x)* – правая часть с областью определения *Q*, *g(x)* – заданная функция, *x,s* – вещественные переменные.

Сведение решения ИУ к решению системы алгебраических уравнений.

Входящий в равенство (3.1) интеграл может быть заменен с помощью любой формулы приближенного интегрирования

$$\int\limits_a^b \chi(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\chi(x_k)+\varepsilon \qquad \textbf{(3.2)}$$

где A_k, x_k – постоянные для данного промежутка и для данной формулы числа, ε - погрешность. Например, для формулы прямоугольников

$$A_k = (b-a)/n, x_1 = a, x_2 = a + (b-a)/n, \ldots, x_n = a + (n-1)(b-a)/n \qquad \textbf{(3.3)}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и последовательно полагая $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$, приходим к следующей системе алгебраических уравнений, которой удовлетворяют числа $y(x_i)$ - значения искомой функции в точках x_i:

$$y(x_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(x_i, x_k) y(x_k) = f(x_i) + \lambda \varepsilon(x_i), i = 1,2,\ldots n$$

Отбрасывая в правой части равенств малые величины ε_i и решая полученную систему уравнений, мы найдем некоторые приближения $y^*(x_1), \ldots, y^*(x_n)$ для значений искомой функции $y(x_1), \ldots, y(x_n)$. Точность и сходимость приближенных решений может быть оценена экспериментально для различных *n*.

4.Общая схема решения краевых задач для уравнений Лапласа методом ГИУ. Примеры.

Приведем формальный перечень этапов решения задач, анализа и визуализации полученных результатов:

- Постановка краевой задачи (формулировка краевых условий на основе механической задачи).
- Получение (на основе метода ГИУ) основной системы интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей слоев.
- Получение разностно-суммирующего аналога основной системы интегральных уравнений.
- Решение возникающей системы алгебраических уравнений относительно значений плотностей слоев в узлах сетки вдоль контуров с граничными условиями.
- Проверка устойчивости и сходимости полученных численных решений от количества узлов сетки вдоль контуров с граничными условиями.
- Вычисление поля искомой функции в произвольной точке пространства (на основе ранее вычисленных плотностей слоев).
- Графическая визуализация полученных результатов (построение изолиний вычисленной функции).