Дискретная математика

Двойственная функция

- Функция

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)}$$

называется ***двойственной***

функцией к функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Замечание:

- У двойственной функции на противоположных наборах принимаются противоположные значения:

если $$f(0,0,1)=1,$$

то $$f^*(1,1,0)=0.$$

Самодвойственная функция

- Функция называется

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

самодвойственной,

если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Пример 1

Пусть $f(x,y)=x \vee y$ - дизъюнкция.

Тогда, двойственной к ней является конъюнкция:

$$f^*(x,y)=\overline{f}(\overline{x},\overline{y})=\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}=xy$$

Пример 2

Пусть $f(x,y)=xy$ - конъюнкция

Тогда, двойственной к ней

является дизъюнкция:

$$f^{*}(x,y)=\overline{f}(\overline{x},\overline{y})=\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}}=x\vee y$$

Пример 3

Пусть $f(x) = x$ - тождество.

Тогда, двойственной к ней

является:

$$f^*(x) = \overline{f}(\overline{x}) = \overline{\overline{x}} = x$$

<u>Пример 4</u>

Пусть $f(x) = \overline{x}$ - отрицание.

Тогда, двойственной к ней

является:

$$f^{*}(x) = \overline{f}(\overline{x}) = \overline{\left(\overline{\overline{x}}\right)} = \overline{x}$$

Замечание:

- Тождество и отрицание – самодвойственные функции.

Пример 5

Пусть $f(x)=0$ - константа 0.

Ее переменная **x** – фиктивна, в формуле отсутствует.

Тогда, двойственной к ней является:

$$f^*(x)=\overline{f}(\overline{x})=\overline{(0)}=1.$$

Пример 6

Пусть $f(x)=1$ - константа 1.

Ее переменная **x** – фиктивна, в

формуле отсутствует.

Тогда, двойственной к ней

является:

$$f^{*}(x)=\overline{f}(\overline{x})=\overline{(1)}=0.$$

Замечание:

- Отношение двойственности симметрично.

Если f двойственна к g,
то и g двойственна к f.

Пример 7

Найти двойственную для функции:

$$f(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz.$$

Решение:

$$f^*(x,y,z) = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{x} \cdot \bar{z} \vee \bar{y} \cdot \bar{z}} =$$

$$= \left(\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}\right) \cdot \left(\overline{\bar{x} \cdot \bar{z}}\right) \cdot \left(\overline{\bar{y} \cdot \bar{z}}\right) =$$

$$= (x \vee y) \cdot (x \vee z) \cdot (y \vee z) =$$

Продолжение примера 7

$$=(x \vee y)\cdot(x \vee z)\cdot(y \vee z)=$$

$$=(x \vee yz)\cdot(y \vee z)= xy \vee xz \vee yz \vee yz =$$

$$= xy \vee xz \vee yz.$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Данная функция самодвойственна.

Замечание:

- Вектор-столбец самодвойственной функции антисимметричен относительно своей середины.

Продолжение примера 7

$$F = xy \vee xz \vee yz.$$

x	y	z	F(x, y, z)
0	0	0	0 1
0	0	1	0 1
0	1	0	0 1
0	1	1	1 0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Принцип двойственности

Если в формуле *F*, представляющей функцию *f* все знаки функций заменить на знаки двойственных функций, то получится формула F^*, представляющая функцию f^* двойственную к *f*.

Принцип двойственности для Булевой алгебры

Если в формуле F, представляющей функцию f все конъюнкции заменить на дизъюнкции, дизъюнкции на конъюнкции, 1 на 0 и 0 на 1, то получится формула F^*, представляющая функцию f^* двойственную к f.

Пример 8

Воспользуемся принципом двойственности.

$$f(x,y,z)=\overline{xy\vee \bar{x}z\vee yz}$$

$$f^*(x,y,z)=\overline{(x\vee y)\cdot(\bar{x}\vee z)}\cdot(y\vee z)=$$

$$=\left(\overline{x\vee y}\vee\overline{\bar{x}\vee z}\right)\cdot(y\vee z)=$$

$$=(\bar{x}\cdot\bar{y}\vee x\cdot\bar{z})\cdot(y\vee z)=$$

$$=\bar{x}\,\bar{y}z\vee xy\bar{z}$$