Основы финансовых вычислений

План

1. ***Теория процентов***
2. ***Финансовые потоки***
3. ***Доходность и риск финансовой операции***
4. ***Портфельный анализ***
5. ***Облигации***

Теория процентов

1. Проценты и процентные ставки

1. Проценты и процентные ставки

Процентные деньги (проценты) - величина дохода от предоставления денег в долг .

Процентная ставка - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

1. Проценты и процентные ставки

Период начисления - интервал времени, к которому относится процентная ставка.

Наращение - процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к сумме долга.

2. Формула наращения по простым процентам

Пусть **P**- первоначальная сумма денег,

i - ставка простых процентов.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией:

$P, \quad P+Pi=P(1+i), \quad P(1+i)+Pi=P(1+2i) \ldots P(1+ni).$

$\mathbf{S=P(1+ni)}$ **-** формула наращения по простым процентам

2. Формула наращения по простым процентам

$S=P(1+ni)$ - формула простых процентов

Наращенную сумму можно представить :

$S=P+I$,

где **$I=Pni$.**

2. Формула наращения по простым процентам

Пример 1. Определим проценты и сумму накопленного долга,

если ссуда равна 100000 руб.,

срок долга 1,5 года

при ставке простых процентов, равной 15% годовых.

Решение:

I=Pni

I=100000 *1,5 *0,15=22500 руб. - проценты за 1,5 года

S=P+I

S=100000+22500=122500 руб. - наращенная сумма.

Задача 3.

Найдите сумму накопленного долга и проценты, если ссуда **180 000** руб. выдана на **3 года** под простые **18 %** годовых.

Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на **2%**?

Решение задачи 3

Найдите сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 180 000 руб. выдана на 3 года под простые 18 % годовых.
Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 2%?

Дано:
P= 180 000 руб.
n = 3
i =0,18
S = ?
I = ?
Во сколько раз увел. наращенная сумма при повышении i на 2 %?

$I = Pni = 180\,000 * 3 * 0,18 = \mathbf{97\,200}$
$S_1 = P + I = 180\,000 + 97\,200 = \mathbf{277\,200}$

При увеличении i на 2 %:
$i = 0,18 + 0,02 = 0.2$

$S_2 = P\,(1+ ni) = 180\,000\,(1+3*0,2) = 288000$
$S_2/S_1 = 288\,000/277\,200 =$ **1,04-** во столько раз увеличилась наращенная сумма

Задача 4

Определите период начисления , за который начальный капитал в размере 46 000 руб. вырастет до 75 000 руб., если ставка простых процентов равна 15 % годовых.

Решение задачи 4

Определите период начисления , за который начальный капитал в размере 46 000 руб. вырастет до 75 000 руб., если ставка простых процентов равна 15 % годовых.

Дано:
P= 46 000 руб.
i =0,15
S = 75 000 руб.
n = ?

I = Pni

$$n = \frac{I}{Pi} = \frac{S - P}{Pi} = \frac{75000 - 46000}{46000 * 0.15} = \mathbf{4,2} \text{ года}$$

Ответ: 4,2 года

Задача 5

Ссуда 150 000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты).

Во сколько раз увеличится наращенная сумма по сравнению с первоначальной?

Решение задачи 5

Ссуда 150 000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты).
Во сколько раз увеличится наращенная сумма по сравнению с первоначальной?

Дано:
P= 150 000 руб.
i =0,2
n = 4 года
S/P =?

S = P (1+ ni)

$$\frac{S}{P} = \frac{P(1+ni)}{P} = 1 + ni = 1 + 4 * 0{,}2 = \mathbf{1{,}8} \text{ раза}$$

Задача 6

Цена товара увеличилась на 30 %. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

Решение задачи 6

Пусть цена была - a

Стала цена - 1,3 a

1,3 a - 100 %

0,3a – x %

X = 0,3a *100/1,3 a =23,07 %

3. Практика начисления простых процентов

При продолжительности ссуды **менее года** величину **n** выражают в виде дроби

$$n = t / K,$$

n - срок ссуды (измеренный в долях года),

K - число дней в году (временная база),

t - срок операции (ссуды) в днях.

3. Практика начисления простых процентов

Возможно несколько **вариантов** расчета процентов:

- если за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней , то говорят, что вычисляют **обыкновенный** или коммерческий процент.
- если за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366, то получают **точный процент**

3. Практика начисления простых процентов

Определение числа дней пользования ссудой также может быть **точным** или **приближенным**.

В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами,

во втором - продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими **по 30 дней**.

3. Практика начисления простых процентов

три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

а) **точные** проценты с **точным** числом дней ссуды

б) **обыкновенные** проценты с **точным** числом дней ссуды

в) **обыкновенные** проценты с **приближенным** числом дней ссуды

3. Практика начисления простых процентов

Пример 1.2. Ссуда, размером 1 000 000 руб., выдана 21 января 2002 г. до 3 марта 2002 г. при ставке простых процентов, равной 20 % годовых.

Решение.

$n = t / K$; $I = P\,n\,i = P\,i\,t / K$;

а) K= 365 , t = 41, I = 1 000 000 *0.2*41 / 365 = 22465,75 руб.

б) K= 360 , t = 41, I = 1 000 000 *0.2*41 / 360 = 22777,78 руб.

в) K= 360 , t = 42, I = 1 000 000 *0.2*42 / 360 = 23333,3 руб.

Янв. -10 (11) дней
Февр. - 30(28) дней
Март -2 дня ***Всего: 42 дня(41 день)***

Задача 7

Банк выдал ссуду размером 500 000 руб.

Дата выдачи ссуды – Тн - 23.01.2014 г., дата возврата Тк – 17.03.2014 г. день выдачи и день возврата считать за один день. Проценты рассчитываются по простой процентной ставке 6 % годовых.

Найти:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Решение задачи 7

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Используем формулы (1.1.3) и (1.1.4)

$$n = t/K; \qquad I = Pni = Pit / K;$$

а) $K = 365$, $t = 53$, $I = 500\,000 * 0.06 * 53 / 365 = 4356{,}16$ руб

б) $K = 360$, $t = 53$, $I = 500\,000 * 0.06 * 53 / 360 = 4416{,}67$ руб

в) $K = 360$, $t = 55$, $I = 500\,000 * 0.06 * 55 / 360 = 4583{,}33$ руб

янв-9 дн

февр-30 –прибл (28- точн)

март -16

Итого: 55 дней – прибл (53 дня -точн)

- ***Доля года:***
- ***0,145(базис 1)***
- ***0,147(базис 2)***
- ***0,15(базис 4)***

Задача 8

Банк предоставил 19.02.14 ссуду 70 000 руб. с погашением через 10 месяцев под 20 % годовых (простые проценты). Определите суммы к погашению при различных способах начисления процентов.

Решение задачи 8

P = 70 000 руб.
i = 0,2
$T_н$ = 19.02.14
$T_к$ = 19.12.14
S_1 - ?
S_2 -?
S_3 -?

Решение:

$$S = P\left(1 + \frac{t}{k}i\right)$$

$$S_1 = P\left(1 + \frac{t}{k}i\right) = 70000 * (1 + 0.830 * 0.2) = 81621.9$$

$$S_2 = P\left(1 + \frac{t}{k}i\right) = 70000 * (1 + 0.84167 * 0.2) = 81783.3$$

$$S_3 = P\left(1 + \frac{t}{k}i\right) = 70000 * (1 + 0.833 * 0.2) = 81666{,}7$$

4. Простые переменные ставки

Если процентные ставки изменяются во времени , то наращенная сумма:

$$S = P^*(1+n_1 i_1+n_2 i_2+\ldots) = P(1+\Sigma n_t i_t),$$

P - первоначальная сумма (ссуда),

i_t - ставка простых процентов в периоде с номером t,

n_t - продолжительность периода начисления по ставке i_t.

4. Простые переменные ставки

Пример 1.3. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10% годовых, а на каждый последующий квартал на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора

$$\mathbf{1+\Sigma n_t i_t} =$$

$$=1+0,25*0,10+0,25*0,09+0,25*0,08+0,25*0,07 =1,085.$$

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

Расчет P по S называется **дисконтированием** суммы S.

Величину P, найденную дисконтированием, называют **современной величиной** (**текущей стоимостью**) суммы S.

Проценты в виде разности $D=S-P$ называются **дисконтом** или **скидкой**.

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

Известны два вида дисконтирования: **математическое дисконтирование** и **банковский учет**.

Математическое дисконтирование:

решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды.

Если в прямой задаче $S=P(1+ni)$,

то в обратной

$$P = S\frac{1}{1+ni}$$

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

Пример 1.4. Через 90 дней после подписания договора, должник уплатит 1000000 рублей. Кредит выдан под 20 % годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

Решение.

$P=S/(1+ni)$ = 1000000 / (1+0.20*90/360) = 952380,95 руб.

D=S – P = 1000000 - 952380,95 =47619,05 руб.

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

Банковский или коммерческий учет.

Операция учета заключается в том, что банк до наступления срока платежа покупает платежное обязательство у владельца **по цене ниже** той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока,

т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется **учетная ставка** (d).

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

По определению, простая годовая **учетная ставка** находится как

$$d = \frac{S - P}{Sn}$$

Размер **дисконта** или учета, удерживаемого банком, равен

$$D=Snd,$$

откуда

$$P=S-D=S-Snd=S(1-nd).$$

Множитель $(1-nd)$ называется **дисконтным множителем**.

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

Пример 1.5. Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 рублей. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20 % годовых (год равен 360 дням). Определить полученную предприятием сумму и дисконт?

Решение.

$D=Snd$ = 1 000 000*0.2*90/360 =50 000 руб.

$P=S - D$ = 1 000 000 – 50 000 = 950 000 руб.

Задача 9

Вексель стоимостью 100 000 учитывается (покупается банком) за 4 года до погашения по простой учетной ставке 15 % годовых.

Найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

Решение задачи 9

Дано:

S = 100 000 руб.

n =4 года

d = 15 %

Найти:

P

D

Решение:

P= S(1-nd) = 100 000* (1 - 4*0,15) = 40 000 руб.

D = S – P = 100 000-40 000 = 60 000 руб.

Задача 10

- Клиент имеет вексель на 16 000 руб., который он хочет учесть 10.01.14 в банке по простой учетной ставке 8%.
- Какую сумму он получит, если срок погашения 10.07.14(при условии что в месяце 30 дней , в году 360 дней) ?

Решение задачи 10

Дано:

S = 16 000 руб.

Тн = 10.01.14

Тк = 10.07.14

D = 8 %

Найти:

P

Решение:

$$\mathrm{P} = S(1 - nd) = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 16000 * \left(1 - \frac{30 * 6}{360} * 0.08\right) = 15360$$

$\frac{t}{K} = 0.5$ – доля года (базис 4)

6. Формула наращения по сложным процентам

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют **капитализацией** процентов.

6. Формула наращения по сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна *P*, тогда **через один год** сумма долга с присоединенными процентами составит:

$$P+Pi = P(1+i),$$

через 2 года:

$$P(1+i)+ P(1+i)\, i = P(1+i)(1+i) = =P(1+i)^2,$$

через n лет:

$$P(1+i)^n.$$

Таким образом, получаем **формулу наращения для сложных процентов**

$$S=P(1+i)^n$$

1. Формула наращения по сложным процентам

Пример 1.6. В кредитном договоре, на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года, зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20% годовых. Определить наращенную сумму.

Решение. $S=P(1+i)^n$,

S = 1 000 000*(1+0,2)*4 = 2 073 600 руб.

Задача 11

В банк 10 февраля на депозит положили сумму 20 000 руб. под 11 % годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 11 октября 2014 г.? (считать в году -360 дней, в месяце 30 дней)

Решение задачи 11

Дано:

Тн = 10.02.14

Тк = 11.10.14

P = 20 000 руб.

i=11 %

Найти:

S

Решение:

$$S = P(1+i)^{\frac{t}{k}} = 20\,000 * (1+0.11)^{\frac{241}{360}} = 21447.2 \text{ руб.}$$

Доля года - 0,669 (базис 4)

7. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

$$S = P(1+i_1)^{n1}(1+i_2)^{n2}...(1+i_k)^{nk},$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ - последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$

7. Формула наращения по сложным процентам, когда ставка меняется во времени

Пример 1.7. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20% годовых плюс маржа 10% в первые два года,

8% в третий год, 5% в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение.

$$(1+0,3)^2*(1+0,28)*(1+0,25)=2,704$$

8. Номинальная и эффективная ставки процентов.

Номинальная ставка.

Пусть годовая ставка сложных процентов равна ***j*,**

а число периодов начисления в году ***m*.**

При каждом начислении проценты капитализируются, то есть добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами.

Каждый раз проценты начисляют по ставке ***j/m***. Ставка ***j*** называется **номинальной.**

8. Номинальная и эффективная ставки процентов

Начисление процентов по **номинальной ставке** производится по формуле:

$$S=P(1+j/m)^N,$$

N - число периодов начисления всего ($N=mn$)

m - число периодов начисления в году,

n – количество лет

8. Номинальная и эффективная ставки процентов

Пример 1.8. Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на 28 месяцев.

Проценты сложные, ставка - 60% годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Вычислить наращенную сумму.

Решение.

Начисление процентов ежеквартальное.

Всего имеется N = (28/3) кварталов.

Число периодов начисления в году *m* = *4.*

$$S=P(1+j/m)^{N},$$

$S = 20\,000\,000 * (1 + 0{,}60 / 4)^{(28/3)} = 73\,712\,844{,}81$ руб.

3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m.

3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Если проценты капитализируются m раз в год,

каждый раз со ставкой j/m,

то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения:

$$(1+i_э)^n=(1+j/m)^{mn},$$

$$\boldsymbol{i_э=(1+j/m)^m-1}.$$

Обратная зависимость имеет вид

$$\boldsymbol{j=m[(1+i_э)^{1/m}-1]}.$$

3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Пример 1.9. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10% годовых.

Решение.

$$i_э=(1+j/m)^m-1.$$

$i_э=(1+0{,}1/4)^4 - 1 = 0{,}1038$, т.е. 10,38%.

3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Пример 1.10. Определить какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12% годовых.

Решение. $\boldsymbol{j=m[(1+i_э)^{1/m}-1]}$.

$j=4*[\,(1+0{,}12)^{(1/4)}-1\,]=0{,}11495$,

т.е. 11,495%.

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Математический учет

Исходная формула для наращения:

$S=P(1+i)^n$

Выразим Р: $$P = S\frac{1}{(1+i)^n}$$

где $\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$ - учетный или дисконтный множитель

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Пример 1.11. Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1000 000 руб.

Определить ее современную стоимость, при условии, что применяется ставка сложных процентов 10 % годовых.

Решение.

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n}$$

Р = 1 000 000/(1+0,10)^{5}= 620 921,32 руб.

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Если проценты начисляются m раз в году:

$$P = S\frac{1}{(1+j/m)^{mn}}$$

где $\dfrac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn}$ - дисконтный множитель

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Величину *P*, полученную дисконтированием *S*,

называют **современной** или **текущей стоимостью**

или **приведенной величиной *S*.**

Разность *D=S - P* называют **дисконтом**.

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Банковский учет.

Дисконтирование по сложной учетной ставке

осуществляется по формуле $P=S(1-d_{сл})^n$,

где $d_{сл}$ - **сложная годовая учетная ставка**.

Дисконт в этом случае равен

$$D= S-P = S-S(1-d_{сл})^n = S[1-(1-d_{сл})^n]$$

9.Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Пример 1.12. Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб.

Банк учел вексель по сложной учетной ставке 10 % годовых.

Определить дисконт.

Решение.

$P = S(1\text{-}d_{сл})^n$ =1 000 000*(1 - 0,10) ^{5}= 590 490,00 руб.

$D = S – P$ = 1 000 000 – 590 490 = 409 510 руб.

10. Эквивалентность простых и сложных процентных ставок

В случае однократного начисления процентов имеем

$P\ (1 + i_{прост}\ n) = P\ (1 + i_{сложн})^n$

Делим на P:

$(1 + i_{пр}\ n) = (1 + i_{сл})^n$

Выражаем $i_{пр}$ $\quad i_{пр} = ((1 + i_{сл})^n - 1)/n$

Выражаем $i_{сл}$ $\quad i_{сл} = \sqrt[n]{1 + i_{пр} n} - 1$

В случае **m-кратного начисления** процентов имеем за n периодов:

$$\mathrm{P}\left(1+i_{\text{пр}}n\right)=\mathrm{P}\left(1+\frac{i_{\text{сл}}}{m}\right)^{m\cdot n}$$

Выражаем $i_{\text{пр}}$

$$i_{\text{пр}}=\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{i_{\text{сл}}}{m}\right)^{m\cdot n}-1\right)$$

Выражаем $i_{\text{сл}}$

$$i_{\text{сл}}=m\left(\sqrt[n\cdot m]{1+i_{\text{пр}}n}-1\right)$$

Пример. Найти простую процентную ставку $i_{пр}$, эквивалентную сложной ставке в 15 % для временного интервала в пять лет при ежемесячном начислении процентов.

$$i_{пр} = \frac{1}{n}((1 + \frac{i_{сл}}{m})^{m \cdot n} - 1) = \frac{1}{5}((1 + \frac{0,15}{12})^{5 \cdot 12} - 1) = 0,2214$$

Т.е. эквивалентная простая процентная ставка 22,14 %.

11. «Правило 70». «Правило 100». Увеличение капитала в произвольное число раз.

Сложные проценты.

Удвоение капитала в схеме сложных процентов при ставке i происходит примерно за $T = 70/ i$ лет.

(ставка i задается в процентах).

$S=P(1+i)^n$

Т.к. сумма удваивается , то $S=2P$:

$2P=P(1+i)^T$

Разделим *на P левую и правую часть:*

$2=(1+i)^T$

Прологарифмируем

$Ln2=T\ ln(1+i)$

Разлагая $ln(1+i)$ *по степеням* i, *получим* $ln(1+i)\approx i$, *тогда*

$Ln2=Ti$,

Отсюда $T=ln2/i$,

$\boldsymbol{T=0{,}693/i} \approx 0{,}70\ /\ i$

Если i *брать в процентах, то* $\boldsymbol{T} \approx 70\ /\ i$

Пример. За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?

$T = 70/i = 70/18 = 3{,}89$ лет

Простые проценты

В случае простых процентов имеем ***S=P(1+ni),***

заменяем S на 2P, n заменяем на T,

2P=P(1+Ti),

2=1+Ti,

Ti = 1,

T =1/i

или, если i выражена в процентах , то

T = 100 / i

Таким образом, «Правило 70» в случае простых процентов заменяется «Правилом 100».

Пример. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 18 % годовых?

T = 100 / i =100 / 18= 5,56 лет

Увеличение капитала в произвольное число раз

Простые проценты

В случае простых процентов имеем $nP=P(1+Ti)$,

отсюда $n = 1+Ti$,

откуда

$T =(n-1) / i$

Пример. При ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза за

$T =(n-1) / i = 3/0,1 = 30$ *лет*

Задача 12

При какой годовой процентной ставке сумма утроится за 6 лет, если проценты начисляются ежемесячно?

Решение задачи 12

Дано:

n = 6 лет

S = 3 P

m = 12

i - ?

Решение:

$$S = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

$$3P = P(1 + \frac{i}{12})^{12*6}$$

$$3 = (1 + \frac{i}{12})^{72}$$

$$3^{\frac{1}{72}} = 1 + \frac{i}{12}$$

$$\frac{i}{12} = 1 - 3^{\frac{1}{72}}$$

$$\boldsymbol{i} = \left(1 - 3^{\frac{1}{72}}\right) * 12 = 0.18 = \mathbf{18\%}$$

Задача 13

При какой годовой процентной ставке сумма удвоится за 7 лет, если проценты начисляются ежеквартально?

Решение задачи 13

Дано:

n = 7 лет

S = 2 P

m = 4

i - ?

Решение:

$$S = P(1 + \frac{i}{m})^{mn}$$

$$2P = P(1 + \frac{i}{4})^{4*7}$$

$$2 = (1 + \frac{i}{4})^{28}$$

$$\frac{i}{4} = 1 - 2^{\frac{1}{28}}$$

$$\boldsymbol{i = 10\%}$$

12.Влияние инфляции на процентную ставку. Формула Фишера

Говорят, что инфляция составляет долю α в год, если стоимость товара за год увеличивается в $(1+\alpha)$ раз.

Инфляция уменьшает реальную ставку процента.

При инфляции деньги обесцениваются в $(1+\alpha)$ раз, поэтому реальный эквивалент наращенной за год суммы $S = P(1+i)$ будет в $(1+\alpha)$ раз меньше

Наращенная сумма с учетом инфляции:

$S_{\alpha} = P(1+i) / (1+\alpha)$

$= P(1 + \alpha - \alpha + i) / (1+\alpha) =$

$= P((1+\alpha) + (i - \alpha)) / (1+\alpha) =$

$= P(1 + \underline{(i - \alpha) / (1+\alpha)}) =$

$= P(1 + \underline{i_{\alpha}})$

Обозначим i_{α} подчеркнутое выражение,

это – процентная ставка с учетом инфляции.

$i_{\alpha} = (i - \alpha) / (1+\alpha)$ - формула Фишера.

При малой инфляции

$i_{\alpha} \approx i - \alpha$

Пример. Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь 10 % доходность?

Решим уравнение Фишера $i_\alpha = (i - \alpha) / (1+\alpha)$ относительно i.

$i = i_\alpha (1+\alpha) + \alpha =$

$= 0,1 * (1+0,08)+0,08 = 0,188 = 18,8\%$

Ответ : 18.8 % на 0,8 % превышает простой ответ 18%, получаемый простым сложением темпа инфляции и процентной ставки.

Тема 2. Финансовые потоки

1. Понятие финансового потока

Ряд последовательных выплат и поступлений называют **потоком платежей**.

Выплаты представляются **отрицательными** величинами, а поступления - **положительными**.

Примеры:

- выплаты пенсий из пенсионного фонда
- периодические взносы в фонд (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т. д.)
- дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам

Обобщающими характеристиками потока платежей являются **наращенная сумма и современная** величина.

Наращенная сумма потока платежей - это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Современная величина потока платежей - сумма всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени

2. Финансовые ренты и их классификация

Финансовая рента или **аннуитет** - поток платежей, все члены которого **положительные** величины, а временные интервалы **постоянны**, называют.

Параметры :

член ренты - величина каждого отдельного платежа

период ренты - временной интервал между двумя соседними платежами

срок ренты - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода

процентная ставка - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

Виды финансовых рент:

1. В зависимости от продолжительности периода (**времени между платежами**), ренты делят на **годовые и р-срочные**, где р - число выплат в году.
2. **По числу начислений процентов** различают ренты **с начислением один раз в году, m раз или непрерывно.** Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.
3. **По величине членов** различают **постоянные** (с равными членами) и **переменные ренты**.

4. **По вероятности выплаты** членов различают **ренты верные** и **условные**. (Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.)
5. **По числу членов** различают ренты **с конечным** числом членов (или ограниченные) и **бесконечные** (или вечные).
6. В зависимости **от наличия сдвига момента начала** ренты по отношению к началу действия контракта подразделяются на **немедленные** и **отложенные** или **отсроченные**.

7. Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются **в конце каждого периода,** то такие ренты называются **обычными** или **постнумерандо**.

Если же выплаты производятся **в начале каждого периода,** то ренты называются **пренумерандо**.

3. Формулы наращенной суммы. Обычная годовая рента

Пусть в конце каждого года в течение ***n*** лет на расчетный счет вносится по ***R*** рублей,

сложные проценты начисляются **один раз в год** по ставке *i*.

В этом случае **первый взнос** к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$,

Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д.

На последний взнос проценты не начисляются.

Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии

$S= R+ R(1+i) + R(1+i)^2 +. . . + R(1+i)^{n-1}$, Сумма членов геометрической прогрессии:

$S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+. . . + R(1+i)^{n-1}$,

Эта сумма равна

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i}$$

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

где $s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ - коэффициент наращения ренты

Пример 1.13. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб.,

на которые **1 раз в год** начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%.

Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

S = 10*[(1+0,1)^{3} – 1] / 0,1 = 33.100 млн. руб.

Годовая рента, начисление процентов m раз в году.

Это означает, что применяется каждый раз ставка ***j/m***, где *j* - номинальная ставка процентов.

Тогда члены ренты с начисленными до конца срока процентами имеют вид

$$R(1+j/m)^{m(n-1)},\ R(1+j/m)^{m(n-2)}\ , \ldots ,\ R.$$

Наращенная сумма ренты:

$$S = R\,\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}$$

Пример 1.14. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб., на которые **ежеквартально (m=4)** начисляются проценты по сложной годовой ставке 10%.

Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m}-1}$$

$$S = 10*[(1+0,1/4)^{(3*4)} - 1] / [(1+0,1/4)^{4} - 1] =$$

33.222 млн. руб.

Рента *p*-срочная, *m*=1

Рента выплачивается p раз в году равными платежами, а проценты начисляются один раз в конце года.

Если *R* - годовая сумма платежей, то размер отдельного платежа равен *R/p.*

Наращенная сумма:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$

Пример 1.15. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал) ,

на которые **в конце года** начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых.

Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{p[(1+i)^{1/p} - 1]}$$

S = (10/4)*[(1+0,1)^{3} – 1] / [(1+0,1)$^{(1/4)}$– 1] = 34.317 млн. руб.

2. Формулы наращенной суммы. Обычная годовая рента

Рента *p*-срочная, *p*=*m*.

Число платежей ***p*** в году и число начислений процентов ***m*** совпадают, т.е. $p=m$.

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}$$

2. Формулы наращенной суммы. Обычная годовая рента

Пример 1.16. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал) ,

на которые **ежеквартально** начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых . Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}$$

S = 10*[(1+0,1/4) $^{(3*4)}$ – 1] / 0,1 = 34.489 млн. руб.

Рента *p*-срочная, *p*≥1, *m*≥1.

Это самый общий случай *p*-срочной ренты с начислением процентов *m* раз в году, причем, возможно $p \neq m$.

$$S = R\frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{p[(1 + j/m)^{m/p} - 1]}$$

Пример 1.17. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи (p=4) равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал) ,

на которые **ежемесячно** (m=12) начисляются проценты по сложной ставке 10% годовых .

Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение.

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}$$

S = (10/4)*[(1+0,10/4) $^{(3*4)}$–1]/[(1+0,10/4)$^{(12/4)}$–1]=34.5296 млн. руб.

4. Формулы современной величины. Обычная годовая рента.

Пусть член годовой ренты равен *R*,

процентная ставка *i*,

проценты начисляются один раз в конце года,

срок ренты *n*.

Тогда дисконтированная величина первого платежа равна :

$$R\frac{1}{1+i}$$

Сумма платежей:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Пример 1.18. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

Решение.

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$A = 10 * [1- (1+0.1)^{(-3)}]/0.1 = 24.868$ млн. руб

Рента *p*-срочная, *p*≥*1*, *m*≥*1*.

В самом общем случае для произвольных значений *p* и *m*

$$A = R\,\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}$$