Основы финансовых вычислений

Элементы финансовой математики.

Лекция 2

3. Сложные проценты

В финансовой практике основная часть расчетов ведется с использованием ***сложных процентов***.

<u>Применение схемы сложных процентов целесообразно в следующих случаях</u>:

- Проценты не выплачиваются по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме долга, которая служит базой для их начисления, называется ***капитализацией процентов***.
- Срок ссуды более года.

- Если процентные день не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг, таким образом, увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга.

- За первый период начисления:

$$FV_1 = PV + I = PV * r = PV*(1+r)$$

- За два периода начисления при условии капитализации ранее наращенной суммы:

$$FV_2 = FV_1 *(1+r) = PV*(1+r)^2$$

- За n периодов начисления:

$$\boxed{FV = PV \cdot (1+r)^n = PV \cdot k_н}$$

- - ***формула сложных процентов***.

- Здесь

- ⇨ FV – наращенная сумма долга;
- ⇨ PV – первоначальная сумма долга;
- ⇨ r – ставка процентов в периоде начисления;
- ⇨ n – количество периодов начисления;
- ⇨ $k_н$ – коэффициент (множитель) наращения сложных процентов

- Таким образом, накопление капитала по схеме сложных процентов образует возрастающую числовую последовательность $PV, FV_1, FV_2, \ldots, FV_n$, которая представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом –PV.

- Геометрический рост по правилу сложных процентов при ***n>1*** обгоняет арифметическую прогрессию простых процентов.

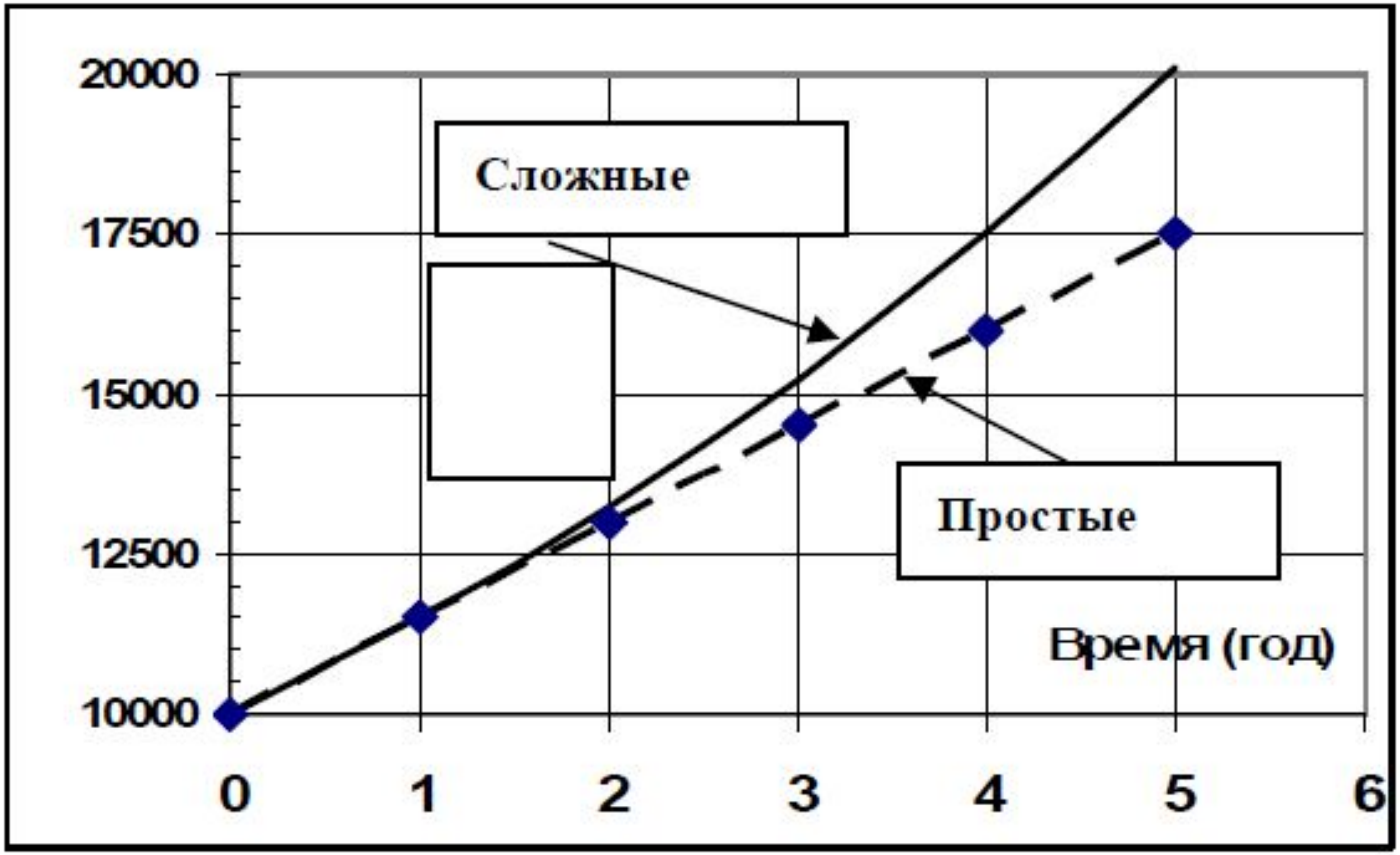

Рис. 5. Рост вложенной суммы при начислении простых и сложных процентов по одинаковой ставке r.

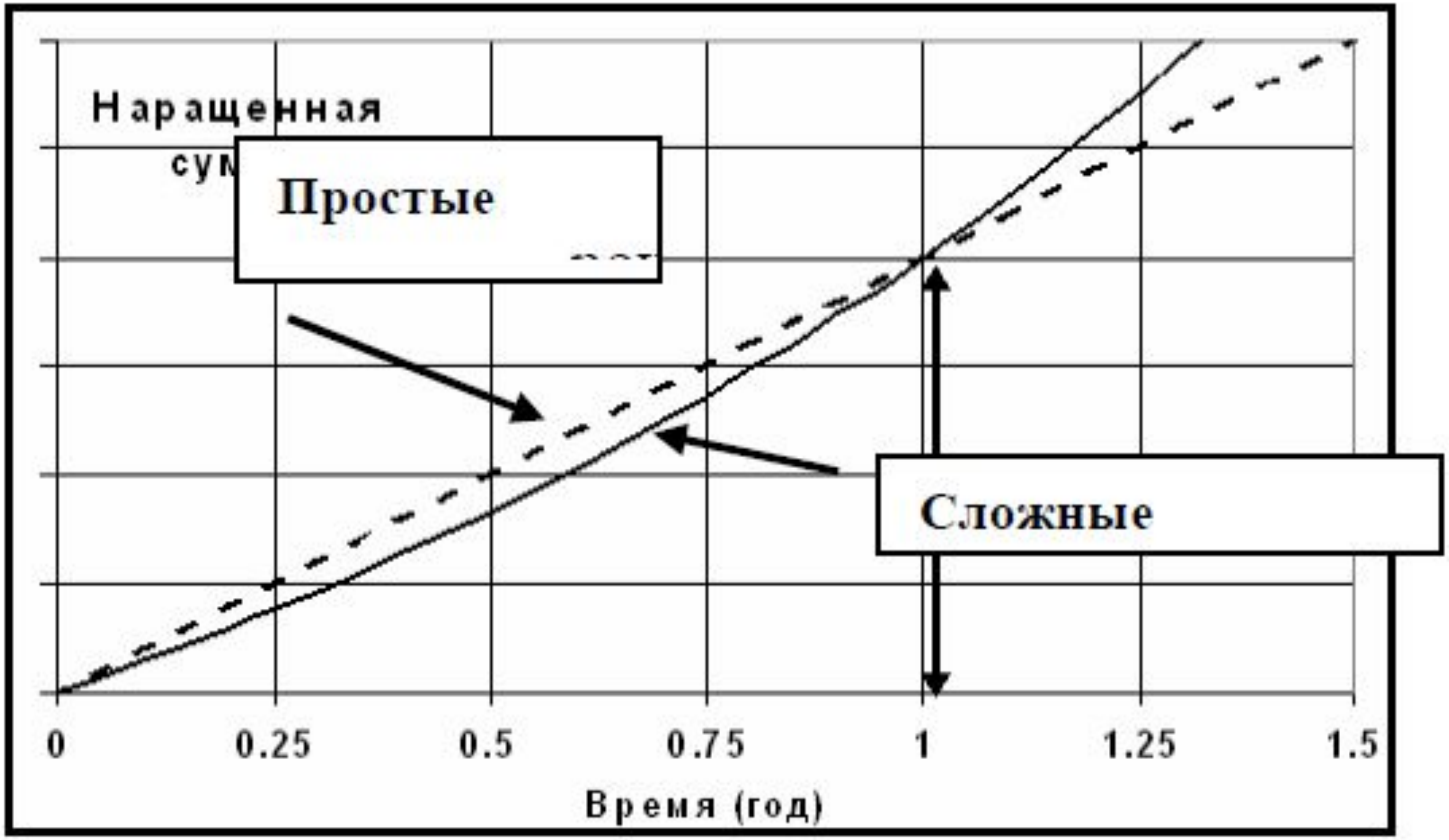

Рис. 6. Фрагмент рис. 5 в пределах 1 года ссуды.

Замечания:

- При краткосрочных ссудах (менее одного года) начисление по простым процентам предпочтительнее, чем по сложным процентам;
- при сроке в один год разница отсутствует,
- при среднесрочных и долгосрочных ссудах наращенная сумма, рассчитанная по сложным процентам значительно выше, чем по простым процентам.

При любом r,

если $0 < n < 1$, то $(1 + n*r) > (1 + r)^n$;

если $n = 1$, то $(1 + n*r) = (1 + r)^n$.

если $n > 1$, то $(1 + n*r) < (1 + r)^n$;

- Для лиц, предоставляющих кредит:
- 1. более выгодна схема простых процентов, если срок ссуды менее года (проценты начисляются однократно в конце года);
- 2. более выгодной является схема сложных процентов, если срок ссуды превышает один год;
- 3. обе схемы дают одинаковый результат при продолжительности периода один год и однократном начислении процентов.

- Величина FV существенно зависит от n и r.

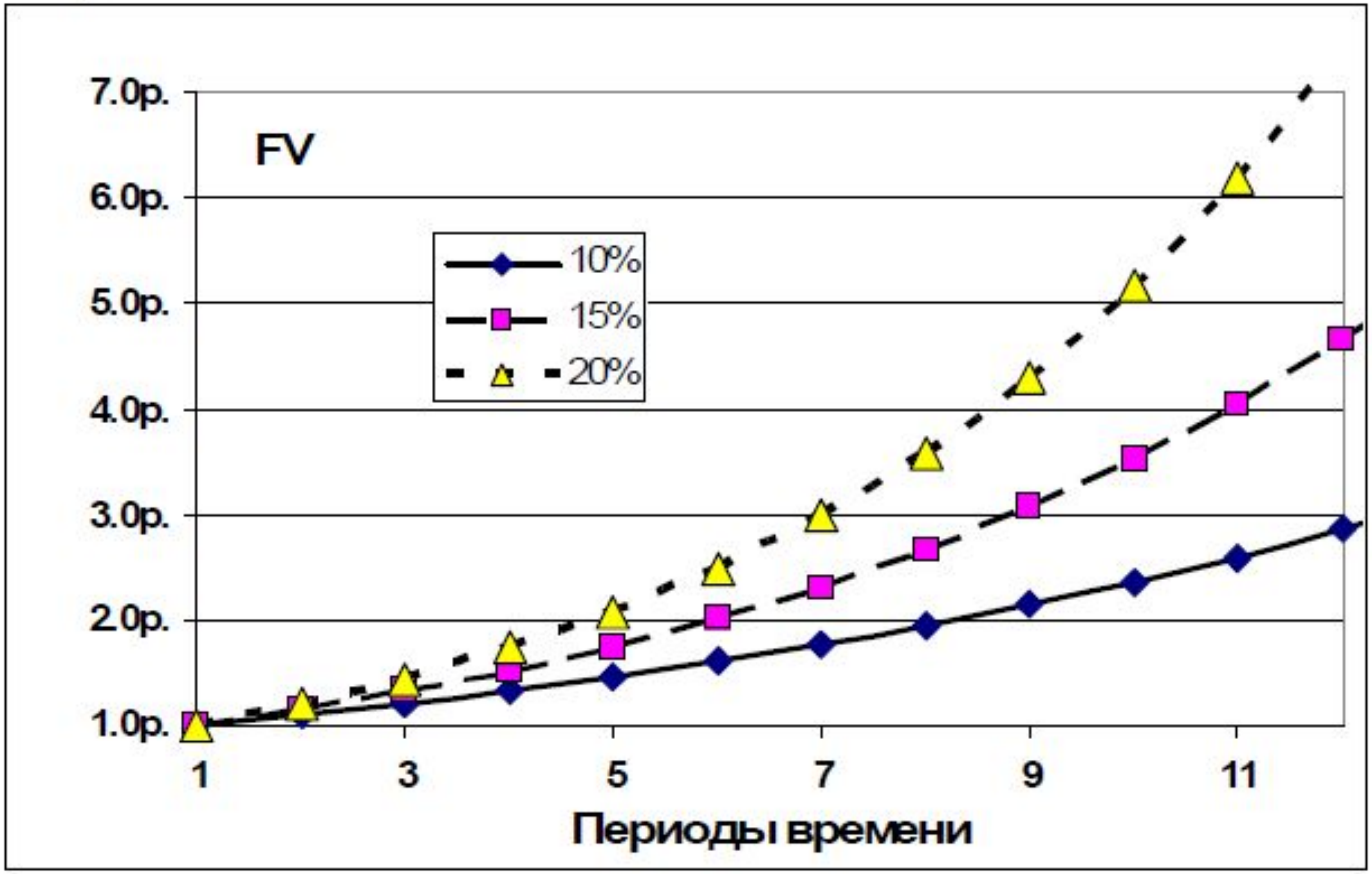

Рис. 7. Рост суммы в 1 руб. по ставкам сложных процентов.

- Сложные проценты начисляются на увеличивающуюся с каждым периодом вычисления базу.

- Сложные проценты характеризуют процесс роста первоначальной суммы со стабильными темпами роста, при наращении ее по абсолютной величине с ускорением.

- Цепной темп прироста за весь период равен:

$$(1+r)^n$$

Пример 1.

- Сумма в размере 15000 руб. дана в долг на 2 года по ставке процента 10% годовых. Определить проценты и сумму, подлежащие возврату.

Решение:

- Наращенная сумма
- $\boldsymbol{FV = PV*(1+r)^n}$ = 15000*(1+0,1)^2 = 18150 руб.
- или $\boldsymbol{FV = PV*k_n}$ = 15000*1,21 = 18150 руб.
- $\boldsymbol{k_n = (1+r)^n}$ – множитель наращения, экономический смысл которого в том, что он показывает, чему будет равна одна денежная единица через $\boldsymbol{n}$ периодов при заданной процентной ставке $\boldsymbol{r}$.
- Сумма начисленных процентов
- $\boldsymbol{I = FV – PV}$ = 18150 – 15000 = 3150 руб.

Пример 2.

- Сумма в 10000 помещена в банк на депозит сроком на 4 года. Ставка по депозиту – 10% годовых. Проценты начисляются раз в год. Какова будет величина депозита в конце срока?

Решение:

- Известны первоначальная сумма вклада ***PV*** = 10000,
- Процентная ставка ***r*** = 10%, срок ***n*** = 4 года.
- Определим будущую величину вклада:
- На конец первого периода:
- $\boldsymbol{FV_1 = PV + PV{*}r = PV{*}(1+r)} = 10000{*}(1+0{,}1) = 11000.$
- Для второго периода величина FV будет равна:
- $\boldsymbol{FV_2 = FV_1 + FV_1{*}r = PV{*}(1+r) + PV{*}(1+r){*}r = PV{*}(1+r)}^2 = 10000{*}(1+0{,}1)^2 = 12100.$
- Для последнего периода (n=4)
- $\boldsymbol{FV_4 = FV_3 + FV_3{*}r = PV{*}(1+r)^4} = 10000{*}(1+0{,}1)^4 = 14641.$

3.1. Начисление процентов при дробных периодах

- Часто финансовые контракты заключаются на период, отличающийся от целого числа лет.
- Если срок финансовой операции выражен дробным числом лет, начисление процентов осуществляется двумя методами:
- *1*. ***Общий метод*** (прямой расчет по формуле сложных процентов)

$$FV = PV * (1 + r)^n,$$
$$n = a + b,$$

где n – период сделки;

a – целое число лет;

b – дробная часть года.

- ***2. Смешанный метод*** (предполагает для целого числа лет периода использовать формулу сложных процентов, а для дробной части года – формулу простых процентов)

$$FV = PV * (1 + r)^a * (1 + b*r).$$

- Так как

$$b < 1, \text{ то } (1 + b*r) > (1 + r)*a,$$

то при использовании смешанной схемы наращенная сумма будет больше.

Пример 3.

- В банке получен кредит под 9,5% годовых в размере 250 тыс. долларов со сроком погашения через два года и 9 месяцев. Определить сумму, которую необходимо вернуть по истечении срока займа двумя способами, учитывая, что банк использует германскую практику начисления процентов.

Решение:

- Общий метод:
- $FV = PV*(1+r)^n$ = $250*(1+0,095)^{2,75}$ = 320,87 тыс. долларов.
- Смешанный метод:
- $FV = PV*(1+r)^a*(1+b*r)$ = $250*(1+0,095)^2*(1+270/360*0,095)$ = 321,11 тыс. долларов.
- Таким образом, процентные деньги по кредиту составят:
- $I = FV - PV$ = 320,87 – 250,00 = 70,87 тыс. долларов (общий метод)
- $I = FV - PV$ = 321,11 – 250,00 = 71,11 тыс. долларов (смешанный метод).
- Смешанная схема начисления процентов для кредитора оказывается более выгодной.

3.2. Непрерывное начисление процентов

- В современных условиях в связи с развитием систем электронных платежей проценты могут начисляться даже чаще, чем один раз в день.
- При бесконечно частом $m \to \infty$ дроблении года на малые процентные периоды, т.е. при непрерывном наращении сложных процентов получается показательный закон роста.

- Если бы проценты начислялись ежедневно, то годовой коэффициент (множитель) наращения выглядел так:

$$k_н = (1 + r / m)^m = (1 + r / 365)^{365}$$

- Но так как проценты начисляются непрерывно, то m стремится к бесконечности, а коэффициент (множитель) наращения стремится к e^r:

$$e^r = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n}$$

- В этом случае наращенная сумма FV может быть записана как:

$$FV = PV * \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m*n} = PV * e^{r*n} = PV * k_s$$

- где k_s - коэффи начи ении процентов при номинальной годовой ставке r.

- В банковской практике ставку непрерывных процентов называют часто ***силой роста*** (force of interest) и обозначают символом δ, в отличие от ставки дискретных процентов (r):

$$FV = PV * e^{r*n} = PV * e^{\delta * n}$$

Пример 6:

- Кредит в размере 100 тыс. долларов получен сроком на 3 года под 8% годовых. Определить сумму подлежащего возврату в конце срока кредиту, если проценты будут начисляться:
- а) один раз в год;
- б) ежедневно;
- в) непрерывно.

Решение:

- Используем формулы дискретных и непрерывных процентов:
- а) начисление один раз в год:

$$FV = 100000 \cdot (1 + 0{,}08)^3 = 125'971{,}2 \text{ долларов;}$$

- б) ежедневное начисление процентов:

$$FV = 100'000 \cdot (1 + 0{,}08 / 365)^{365 \cdot 3} = 127'121{,}6 \text{ долларов}$$

- в) непрерывное начисление процентов:

$$FV = 100'000 \cdot e^{0{,}08 \cdot 3} = 127'124{,}9 \text{ долларов.}$$

- Графически изменение наращенной суммы в зависимости от частоты начисления имеет вид:

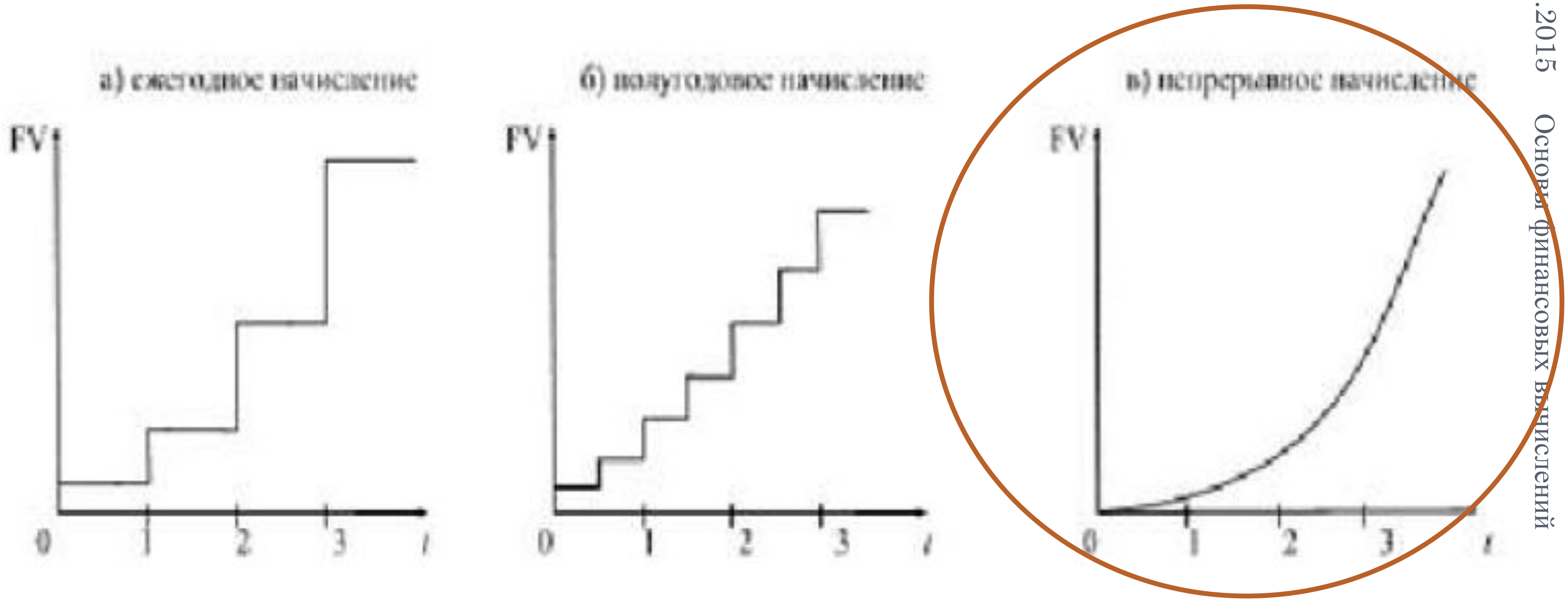

Рис. 3. Различные варианты начисления процентов.

- Таким образом, в зависимости от частоты начисления наращение первоначальной суммы осуществляется с различными темпами, причем максимально возможное наращение осуществляется при бесконечном дроблении годового интервала.

- Непрерывное начисление процентов используется при анализе сложных задач, например, при обосновании и выборе инвестиционных решений.

3.3. Переменная ставка процентов

- Основная формула сложных процентов предполагает постоянную процентную ставку на протяжении всего срока начисления процентов.
- Однако, предоставляя долгосрочную ссуду, часто используют изменяющиеся во времени, но заранее зафиксированные для каждого периода ставки сложных процентов. В случае использования переменных процентных ставок, формула наращения имеет следующий вид:

- В случае использования переменных процентных ставок, формула наращения имеет следующий вид:

$$FV = PV*(1+r_1)^n *(1+r_2)^n *\dots(1+r_k)^n = PV*\prod_{k=1}^{K}(1+r_k)^{n*k}$$

- где r_k - последовательные во времени значения процентных ставок;

- n_k - длительность периодов, в течение которых используются соответствующие ставки.

Пример 7:

Фирма получила кредит в банке на сумму 250000 долларов сроком на 5 лет. Процентная ставка по кредиту определена:

- для первого года – 10%;
- для 2-го года предусмотрена надбавка к процентной ставке в размере 1,5%;
- для последующих лет предусмотрена надбавка к процентной ставке второго года в размере 1%.

Определить сумму долга, подлежащую погашению в конце срока займа.

Решение:

$$FV = PV * (1 + r_1)^{n1} * (1 + r_2)^{n2} * \ldots * (1 + r_k)^{nk} =$$
$$=250000 * (1 + 0{,}1) * (1 + 0{,}115) * (1 + 0{,}125)^3 = 436581.3 \text{ доллара}$$

Таким образом, сумма, подлежащая погашению в конце срока займа, составит 436581,3 доллара, из которых 250000 долларов являются непосредственно суммой долга, а 186581,3 доллара – проценты по долгу.

3.4. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

- Так же как для простых процентов, для сложных процентов необходимо иметь формулы, позволяющие определить недостающие параметры финансовой операции:
- ***1. Срок ссуды:***

$$n = [\ln (FV / PV)] / [\ln (1 + r)] =$$
$$= [\ln (FV / PV)] / [\ln(1 + r / m) * m]$$

2. Ставка сложных процентов:

$$r = \sqrt[n]{FV / PV} - 1 = \left(\sqrt[m*n]{FV / PV} - 1\right) * m$$

Пример 8:

- Рассчитать, через сколько лет вклад размером 1 млн. руб. достигнет 1 млрд., если годовая ставка процента по вкладу 16,79% и начисление процентов производится ежеквартально

Решение:

$$\mathbf{n} = \mathbf{ln}\ (\boldsymbol{FV} / \boldsymbol{PV})\ ] / [\mathbf{ln}(1 + \boldsymbol{r} / \boldsymbol{m})^* \boldsymbol{m}]$$

$$= (\ln(1000000/1000)/(\ln(1+r/4)^*4) = 42.2 \text{ года}$$

Пример 9:

- Сумма 10000 руб. была положена на депозит на 2 года с полугодовым начислением процентов. По окончании была получена сумма 12000 руб. Определите величину банковского процента.

Решение:

$$r = \left(\sqrt[m*n]{FV / PV} - 1\right) * m = \left(\sqrt[2*2]{12000/10000} - 1\right) * 2 = 9.32\%$$

Пример 10:

- В контракте предусматривается погашение обязательств через 120 дней в сумме 1200 долларов, при первоначальной сумме долга 1150 долларов. Определить доходность операции для кредитора в виде процентной ставки.

Решение:

- Рассчитаем годовую процентную ставку, используя формулу «обыкновенного процента», поскольку в условиях сделки нет ссылки на «точный процент»:

$$r = [(FV - PV) / (PV * t)] * T =$$

- Т $= [(1200 - 1150) / (1150 * 120)] * 360 = 0,13$

весьма высока и составляет 13%.