Наибольшее и наименьшее значение функции

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

- Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Стандартный способ (или алгоритм) нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке заключается в вычислении ее значений на концах отрезка и в критических точках внутри отрезка с последующим выбором наибольшего и наименьшего из них.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном отрезке

1° Выясняем существование функции на данном отрезке $[a; b]$.

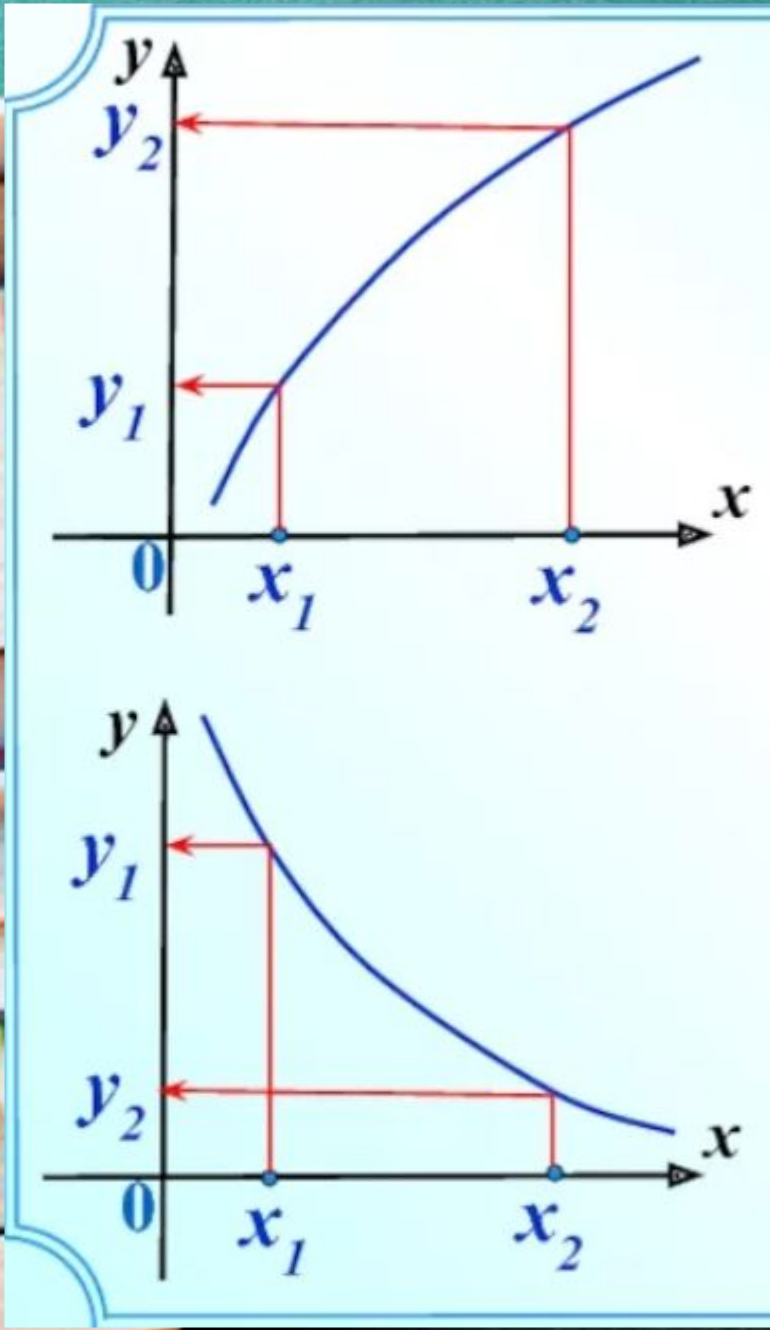
2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

4° Отбираем те точки, которые принадлежат заданному промежутку $[a; b]$.

5° Находим значение функции в этих точках и на концах промежутка: $f(a)$; $f(b)$; $f(x_1)$; $f(x_2)$; и т. д.

6° Выбираем среди полученных значений **наибольшее** или **наименьшее**.

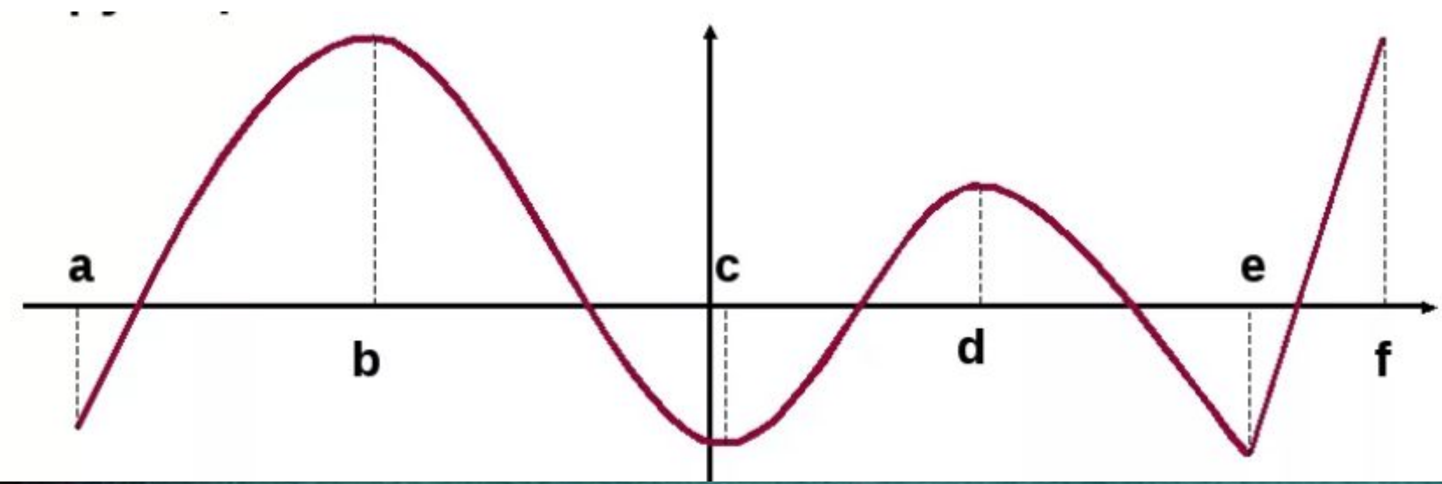


Однако бывает полезно применять следующие утверждения:

1. Если непрерывная функция возрастает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на правом конце отрезка, а наименьшее – на левом.

2. Если непрерывная функция убывает на отрезке, то она принимает наибольшее значение на левом конце отрезка, а наименьшее – на правом.

3. Если функция непрерывна на интервале $(a;b)$ и имеет на этом интервале единственный экстремум (максимум или минимум), то этот экстремум есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции на интервале $(a;b)$.



4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$ и имеет на этом интервале единственную критическую точку x_0. Тогда:

а) если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$, то точка x_0 есть точка минимума, в которой достигается наименьшее значение функции на интервале $(a;b)$;

б) если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то точка x_0 есть точка максимума, в которой достигается наибольшее значение функции на интервале $(a;b)$.

Пример 10. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1;3]$.

Решение. 1-й способ (использование алгоритма).

1) $D(y) = R$.

2) $y' = 4x^3 - 16x$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $4x^3 - 16x = 0$; $4x(x^2 - 4) = 0$.

Корни уравнения: –2; 0; 2. Критические точки функции на отрезке $[-1;3]$: 0; 2.

4) Значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-1;3]$:

$$y(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^2 - 9 = -16;$$

$$y(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9;$$

$$y(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25;$$

$$y(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 9 = 0.$$

Следовательно, $\min\limits_{[-1;3]} y(x) = y(2) = -25$.

2-й способ (промежутки знакопостоянства производной).

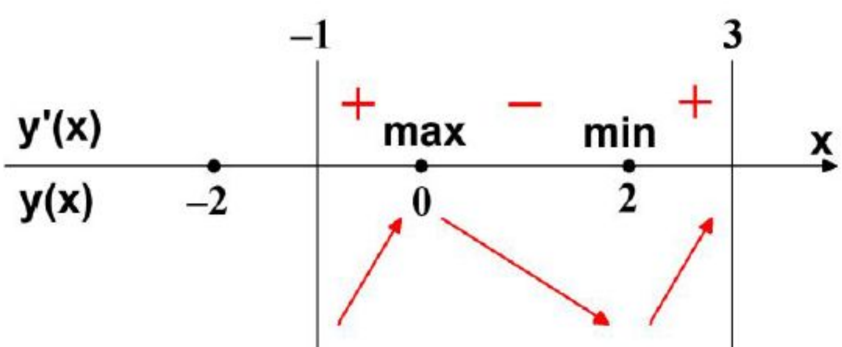
1) $D(y) = R$.

2) $y' = 4x^3 - 16x$; $D(y') = R$.

3) $y' = 0$; $4x^3 - 16x = 0$; $4x(x^2 - 4) = 0$.

Корни уравнения: –2; 0; 2. Критические точки функции на промежутке $[-1;3]$: 0; 2.

4) Расставляем знаки производной y' на каждом из промежутков $[-1;0)$, $(0;2)$ и $(2;3]$.



При переходе через критическую точку $x = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс. Значит, $x = 2$ – точка минимума.

Наименьшее значение функции может достигаться при $x = -1$ или при $x = 2$. Так как $y(-1) = -16$ и $y(2) = -25$, то $\min\limits_{[-1;3]} y(x) = y(2) = -25$.

Замечание. Используя вторую производную $y'' = 12x^2 - 16$, определяем также, что $y''(0) = -16 < 0$ и $x = 0$ – точка максимума функции, $y''(2) = 32 > 0$ и $x = 2$ – точка минимума функции.

Ответ: –25.