

# 6.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И В ТОЧКЕ

Понятие предела функции  $y=f(x)$  связано с понятием предела числовой последовательности

$$a_n = f(n)$$

У числовой последовательности переменная  $n$ , возрастая, принимает только целые значения, а у функции переменная  $x$  может принимать любые значения.

*Число  $A$  называется пределом функции  $y=f(x)$ , при  $x$  стремящемся к бесконечности, если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое положительное число  $S$ , что при всех  $|x| > S$ , выполняется неравенство:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$



# СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

*При достаточно больших по модулю значениях  $x$ , значения функции  $f(x)$  очень мало отличаются от числа  $A$  (меньше, чем на число  $\varepsilon$ , каким бы малым оно не было).*

Рассмотрим геометрический смысл этого определения.

Неравенство

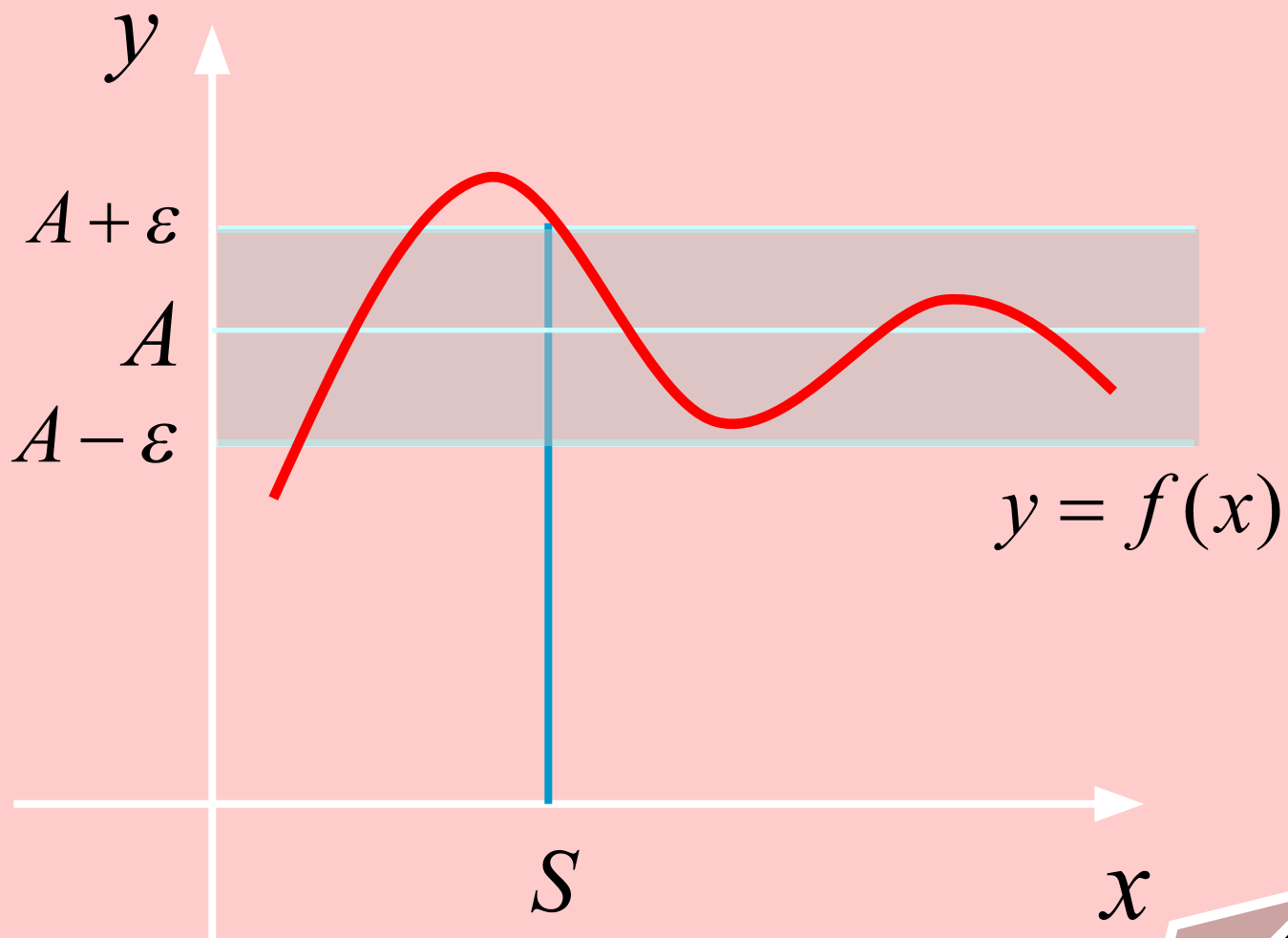
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

что соответствует расположению части графика  $y=f(x)$  в полосе шириной  $2\varepsilon$ .





**Т.е. число  $A$  есть предел функции**

$$y = f(x)$$

**если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ ,  
найдется такое число  $S$ , что при всех**

$$|x| < S$$

**соответствующие ординаты графика функции  
 $y=f(x)$  будут заключены в полосе**

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

**какой бы узкой она не была.**





# Пример.

*Доказать, что*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{x} = 5$$

# Решение.

Для любого  $\varepsilon > 0$   $\left| \left( \frac{5x+1}{x} \right) - 5 \right| < \varepsilon$  

$\left| 5 + \frac{1}{x} - 5 \right| < \varepsilon$    $\left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$    $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$

Т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $S = \frac{1}{\varepsilon} > 0$

Такое, что для всех  $x$ , таких что  $|x| > S$ ,  
выполняется неравенство:

$|f(x) - 5| < \varepsilon$    $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{x} = 5$



# Замечание 1.

*Рассмотренное определение предела при  $x$  стремящемся к бесконечности предполагает неограниченное возрастание  $x$  по абсолютной величине.*

*Можно сформулировать понятие предела при стремлении  $x$  к бесконечности любого знака, т. е. при*

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

В случае, когда  $x \rightarrow +\infty$  неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех  $x$  таких, что  $x > s$ .

В случае, когда  $x \rightarrow -\infty$  неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

должно выполняться при всех  $x$  таких, что  $x < -s$ .

Перейдем к понятию предела функции в точке. Рассмотрим некоторую функцию  $y=f(x)$ . Пусть эта функция задана в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, может быть, самой этой точки.



*Число  $A$  называется пределом функции  $y=f(x)$ , при  $x \rightarrow x_0$ , (или в точке  $x_0$ ) если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое положительное число  $\delta$ , что при всех  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство:*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

# СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕНИЯ:

*При всех значениях  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , значения функции  $y=f(x)$  очень мало отличаются по абсолютной величине от числа  $A$  (меньше, чем на число  $\varepsilon$ , каким бы малым оно не было).*



Неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$   
равносильно двойному неравенству

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

Аналогично неравенство  $|x - x_0| < \delta$

равносильно неравенству  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Это соответствует расположению части графика

$$y = f(x)$$

в полосе шириной  $2\varepsilon$  и попаданию точки  $x$  в  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ .



Т.е. число  $A$  есть предел функции  $y = f(x)$

при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$

найдется такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности соответствующие ординаты графика функции

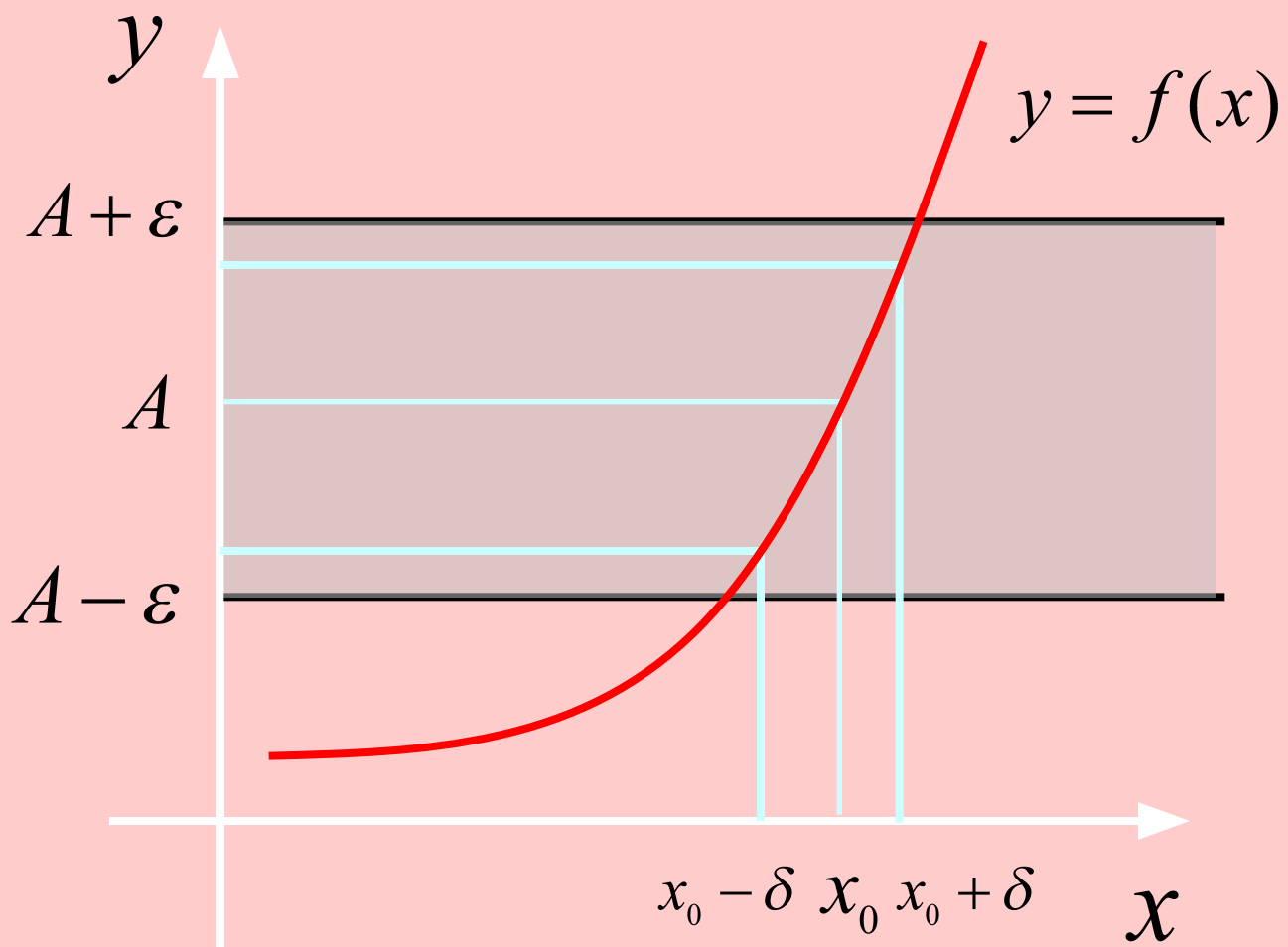
$$y = f(x)$$

будут заключены в полосе

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

какой бы узкой она не была.





# Пример.

*Доказать, что*

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$



# Решение.

Пусть  $\varepsilon=0.1$

Тогда неравенство

$$|2x + 3 - 5| < 0.1$$

будет выполняться при

$$|x - 1| < 0.05$$

Аналогично, при  $\varepsilon=0.01$

Неравенство будет выполняться при

$$|x - 1| < 0.005$$



Т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  неравенство  $|2x + 3 - 5| < \varepsilon$

выполняется при

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$

что для всех  $x$ , таких что  $|x - 1| < \delta$ , выполняется  
неравенство:

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$



# Замечание 2.

*Определение предела не требует существования функции в самой точке  $x_0$ , т. к. рассматриваются значения функции в некоторой окрестности точки  $x_0$ .*

*Т.е. рассматривая предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$*

*мы предполагаем, что  $x \rightarrow x_0$*

*но не достигает значения  $x_0$ .*

# Замечание 3.

*Если при  $x \rightarrow x_0$*

*переменная  $x$  принимает значения только меньше  $x_0$  или, наоборот, больше  $x_0$ , и при этом функция  $f(x)$  стремится к некоторому числу  $A$ , то говорят об односторонних пределах соответственно справа и слева:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$



Определение этих пределов будет аналогично рассмотренному выше при  $x \rightarrow x_0$

Вместо значений  $x$ , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta$$

рассматриваются такие  $x$ , что  $x_0 - \delta < x < x_0$

при  $x \rightarrow x_0 - 0$

и значения  $x$ , такие что

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

при  $x \rightarrow x_0 + 0$



Если пределы функции  $f(x)$  слева и справа одинаковы и равны  $A$ , то существует общий предел этой функции, также равный  $A$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$