Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Работа учителя математики
Лицея №86
Даниловой С. Д.

Геометрическая прогрессия

- **Определение.** **Числовая последовательность, все члены которой отличны от 0 и каждый член которой начиная со второго получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют геометрической прогрессией. При этом число q называют знаменателем геометрической прогрессии.**

Формулы геометрической прогрессии

- **Формула n – го члена геометрической прогрессии**

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

- **Формула суммы n членов геометрической прогрессии**

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Рассмотрим последовательность сумм геометрической прогрессии

$$S_1 = b_1$$

$$S_2 = b_1 + b_2$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3$$

$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

………………………………

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

…………………………………

- **Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называется суммой бесконечной геометрической прогрессии.**
- **Если эта последовательность расходится, то о сумме бесконечной геометрической прогрессии не говорят, хотя сумму n – членов прогрессии можно найти и в этом случае.**

Рассмотрим случай, когда знаменатель q, геометрической прогрессии удовлетворяет условию $|q| < 1$

1) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\frac{b_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q^n - 1)$$

3)Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty}(q^n - 1) = \lim_{n\to\infty} q^n - \lim_{n\to\infty} 1 = -1$$

4) Следовательно $\dfrac{b_1}{q-1}\lim\limits_{n\to\infty}(q^n - 1) = -\dfrac{b_1}{q-1} = \dfrac{b_1}{1-q}$

- **Таким образом, если знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$, то сумма прогрессии существует и вычисляется по формуле**

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Пример 1

Дано : (b_n) - геометрическая прогрессия

$$24; -8; \frac{8}{3}; -\frac{8}{9}; ...$$

Найти : S

1) Найдем знаменатель прогрессии q

$$q = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}$$

2) $q = -\frac{1}{3}$ удовлетворяет условию $|q| < 1$

3) Вычислим по формуле S

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{24}{1+\frac{1}{3}} = \frac{24}{\frac{4}{3}} = \frac{24 \cdot 3}{4} = 18$$