Механика.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

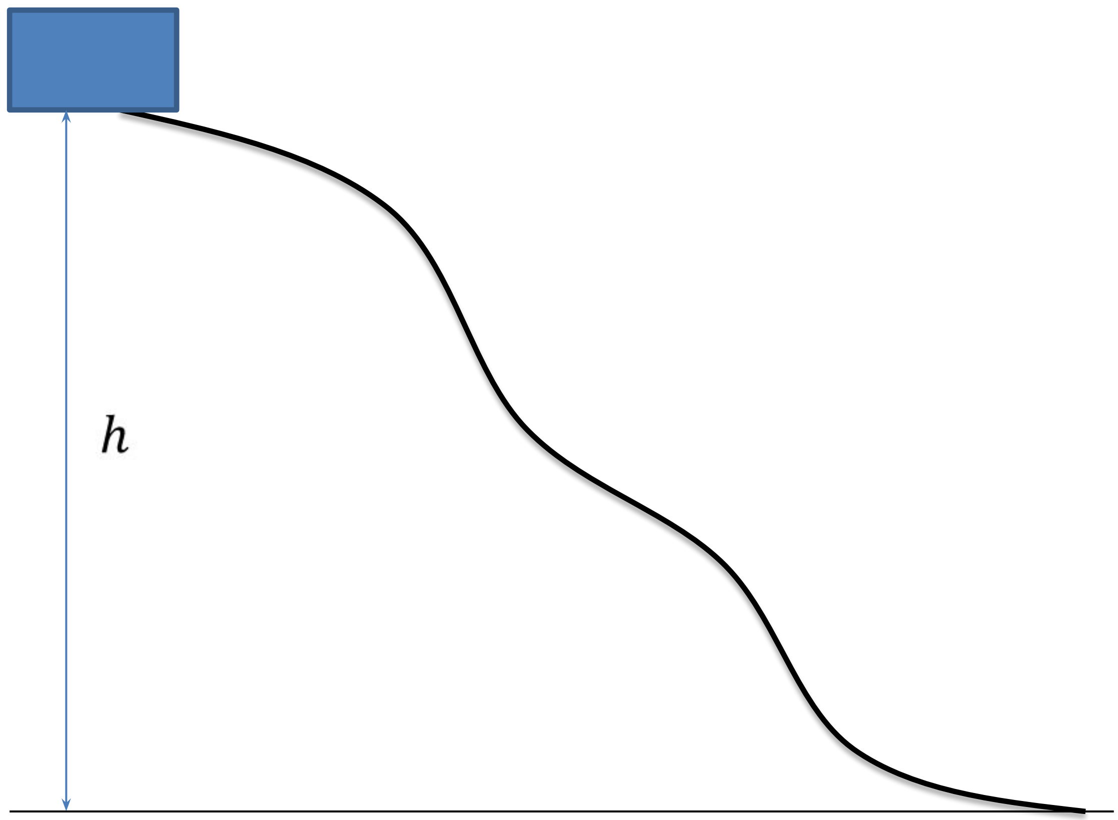
3.5. Работа, кинетическая энергия.

- Динамический подход
- Законы Ньютона позволяют решить любую задачу динамики детально, т.е. установить закон движения материальной точки, что в свою очередь означает узнать положение материальной точки в любой момент времени. Этот подход к решению задач динамики носит название динамического подхода. Иногда это бывает не просто, в связи с тем, что зависимость сил, действующих на материальную точку от координат слишком сложна. С другой стороны это не всегда бывает необходимо.

Энергетический подход.

- Часто бывает так, что нужно найти конечное состояние материальной точки, не интересуясь промежуточными. В этом случае можно использовать т.н. энергетический подход к решению задач динамики, использующий понятие кинетической, потенциальной и полной энергии.

Соскальзывание тела с горки.



Скалярное произведение векторов.

- $(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$
- $(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$

Суть энергетического подхода.

- Суть этого подхода состоит в следующем. Умножим скалярно второй закон Ньютона на $d\vec{r}$.
- $m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, d\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i, d\vec{r})$
- Величина $\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i, d\vec{r})$ обозначается dA
- и называется элементарной работой, совершаемой равнодействующей всех сил на элементарном перемещении .

Размерность работы.

- Размерность элементарной работы равно произведению размерности силы и перемещения, т.е. $[dA] = \mathrm{Н} \cdot \mathrm{м} = \frac{\mathrm{кг} \cdot \mathrm{м} \cdot \mathrm{м}}{\mathrm{с}^2}$.
- Эта величина называется Джоулем. Т.о.,$\mathrm{Дж} = \mathrm{Н} \cdot \mathrm{м} = \frac{\mathrm{кг} \cdot \mathrm{м}^2}{\mathrm{с}^2}$.

Преобразования.

- В левой части равенства выполним замену $d\vec{r} = \vec{v}dt$, исходя из определения скорости.
- Тогда из предыдущей формулы следует
- $m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}\right)dt = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i, d\vec{r})$.
- Слева выражение преобразуем с учётом равенства
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v}\right)$
- и поднесём массу под знак производной, тогда
- $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i, d\vec{r})$

Кинетическая энергия.

- Величина, стоящая под знаком производной, и называется кинетической энергией материальной точки.
- $K = \frac{mv^2}{2}$
- Определение.
- Кинетической энергией называется физическая величина, численно равная половине произведения массы материальной точки на квадрат её скорости.

Кинетическая энергия через импульс.

- Используя понятие импульса материальной точки, можно записать
- $K = \dfrac{p^2}{2m}$

Следствия из определения кинетической энергии.

- Из определения кинетической энергии следует, что, во-первых, она есть скалярная величина, во-вторых, размерность её есть размерность массы, умноженная на размерность квадрата скорости
- $[K] = \text{кг}\frac{\text{м}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}$. Т.о., кинетическая энергия выражается в Джоулях, как и элементарная работа.

Закон изменения кинетической энергии в элементах.

- С использованием понятия кинетической энергии равенство может быть записано следующим образом $dK = dA$
- Здесь учтено определение дифференциала
- $\frac{dK}{dt}dt = dK.$
- Это равенство и называется законом изменения кинетической энергии материальной точки в элементах. Оно гласит: изменение кинетической энергии материальной точки за элементарный промежуток времени равно элементарной работе.

Мощность силы.

- Разделим это равенство на dt:
- $\frac{dK}{dt} = \frac{dA}{dt}$
- Величина, стоящая справа от равенства обозначается N и называется мощностью всех сил, действующих на материальную точку.
- Определение.
- Мощностью силы называется физическая величина, числено равная работе, совершаемой силой за единицу времени.
- $N = \frac{dA}{dt}$.

Следствия из определения мощности.

- Из определения мощности следует, что она величина скалярная и измеряется в единицах энергии, делённых на единицу времени, $[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$. Эта величина называется Ватт и т.о. $\text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$.

Устаревшая единица мощности.

- Довольно часто используется устаревшая единица мощности – лошадиная сила.
- 1 кгс – сила тяжести тела массой 1 кг.
- 1 кгс=9.81 Н.
- 1 кгм – работа силы в 1 кгс на расстоянии 1м.
- 1 л.с. – мощность, при которой за 1 с совершается работа в 75 кгм. Таким образом, 1 л.с.=75·9.81 Вт = 735.75 Вт.

Закон изменения кинетической энергии в диф. форме.

- С учётом понятия мощности можно записать
- $\frac{dK}{dt} = N$.
- Это утверждение называется законом изменения кинетической энергии в дифференциальной форме. Оно гласит. Скорость изменения кинетической энергии материальной точки равна мощности всех сил, действующих на материальную точку.

Интегральная форма.

- Проинтегрируем равенство в пределах некоторого промежутка времени от t_0
- до t.
- $\int_{t_0}^{t} \frac{dK}{dt} dt = \int_{t_0}^{t} N dt$
- Интеграл слева представляет собой изменение кинетической энергии за указанный промежуток времени, интеграл справа есть работа всех сил за этот промежуток времени. Так что
- $\Delta K = A$.

Закон изменения кинетической энергии в интегральной форме.

- Это утверждение носит название закона изменения кинетической энергии материальной точки в интегральной форме, т.к. относится оно к отдельному моменту времени, а к целому временному промежутку. Оно гласит: изменение кинетической энергии за некоторый промежуток времени равно работе всех сил, действующих на материальную точку за этот промежуток времени.

Использование закона изменения кинетической энергии в интегральной форме.

- Именно в этой форме данный закон и позволяет решать задачи динамики, не вникая в детали движения материальной точки внутри временного промежутка. Для данного закона неважно, как двигалась материальная точка внутри промежутка. Если известна работа, которую совершили силы, и начальная кинетическая энергия, то можно найти и конечную кинетическую энергию.

3.6. Потенциальные поля. Потенциальная энергия. Связь между потенциальной энергией и силой.

- Определение. Говорят, что в некоторой области пространства задано силовое поле, если каждой точке пространства поставлено в соответствие вектор силы, действующей на тело в данной точке пространства.

Поле силы тяжести.

- Примером силового поля может служить поле силы тяжести. Оно характерно тем, что
- сила, действующая на тело, направлена всегда вертикально вниз;
- не зависит от координат тела;
- пропорциональна его массе.
- Замечание. Указанное выше свойство силы тяжести – независимость от координат тела – справедливо лишь для случая, когда высота тела не превышает нескольких десятков километров.

Свободное падение тел. Ускорение свободного падения.

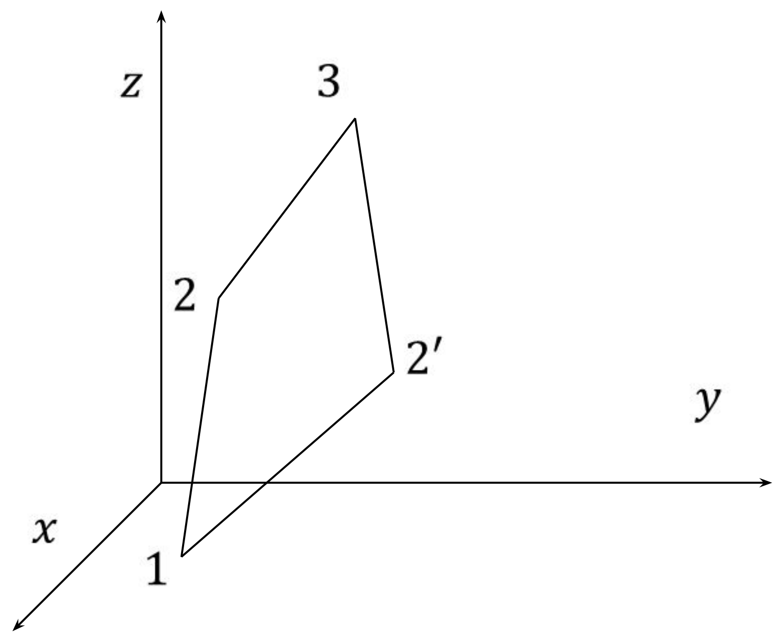
- Из того факта, что сила тяжести пропорциональна массе тела следует, что ускорение тел, вызываемое силой тяжести, одинаково для всех тел и не зависит от массы. Это ускорение обозначается $\vec{g}$ и называется ускорением свободного падения. Оно всегда направлено вертикально вниз и не зависит от координат в пределах высоты нескольких десятков километров над поверхностью Земли. Несколько зависит от места на поверхности Земли.

Сила тяжести.

- Таким образом, силу тяжести можно выразить через ускорение свободного падения
- $\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g}$.

Работа силы тяжести.

- Пусть тело массой m перешло из положения 1 в положение 2. Найдём работу силы тяжести при таком перемещении.
- $A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_{\text{тяж}}, d\vec{r}) = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{g}, d\vec{r})$.



Работа силы тяжести.

- Поскольку ускорение свободного падения не зависит от координат, его можно вынести из-под знака интеграла. Под знаком интеграла останется только дифференциал радиус-вектора материальной точки, интеграл от которого равен перемещению материальной точки из первого положения во второе.
- $A_{12} = m\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}(\vec{g}, d\vec{r}) = m(\vec{g}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1).$

Работа на участке 1-2

- Т.к.
- $\vec{g} = (0,0,-g)$,
- а
- $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,
- то
- $A_{12} = -mg(z_2 - z_1)$.

Работа на участке 2-3

- Предположим теперь, что из точки 2 тело переместилось в точку 3. Тогда сила тяжести совершила работу
- $A_{23} = -mg(z_3 - z_2)$.

Полная работа

- Найдём полную работу, совершённую силой тяжести при переходе из положения в положение . Для этого сложим работы на двух участках пути
- $A_{123} = -mg(z_2 - z_1) - mg(z_3 - z_2) = -mg(z_3 - z_1)$.

Независимость работы от промежуточных точек траектории.

- Отсюда видно, что данная работа не зависит совсем от координат второй точки. Т.о., работа силы тяжести не зависит от промежуточных точек, а, значит, от формы траектории движения точки, а зависит лишь от начального и конечного её положений.

Потенциальные поля.

- Определение. Силовые поля, работа сил которых не зависит от формы траектории движения тел, а зависит лишь от начального и конечного их положений, называются потенциальными, а силы, действующие на тела со стороны этих полей, называются консервативными.
- Таким образом, поле силы тяжести является потенциальным полем.

Работа на обратном пути.

- Предположим, что тело совершило переход из положения 3 в положение 1 через некоторую другую точку 2’. Тогда работа, совершённая силой тяжести будет равна
- $A_{32'1} = -mg(z_1 - z_3)$.

Работа на замкнутом пути.

- Найдём полную работу силы тяжести на замкнутом контуре
- $A_{123} + A_{32'1} =$
$- mg(z_3 - z_1) - mg(z_1 - z_3) = 0.$
- Это утверждение называется теоремой о работе консервативных сил на замкнутом контуре. Оно гласит: «Работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю».

Потенциальная энергия поля силы тяжести.

- Исходя из выражения для работы в поле силы тяжести эту работу можно представить следующим образом
- $A_{12} = -(mgz_2 - mgz_1)$.
- Величина $U = mgz$ называется потенциальной энергией поля силы тяжести. С помощью этой величины работу силы тяжести можно представить следующим образом
- $A_{12} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U$.
- Это утверждение гласит: «Работа силы тяжести равна убыли потенциальной энергии».

Потенциальная энергия любых потенциальных полей.

- Оно справедливо не только для поля силы тяжести, но и для любых потенциальных полей: «Для потенциальных полей существует такая функция координат, называемая потенциальной энергией, что работа сил этих полей равна убыли потенциальной энергии тел в этих полях».
- Для разных потенциальных полей потенциальная энергия вычисляется по разным формулам.

Следствия из определения потенциальной энергии.

- 1. Скалярная величина.
- 2. Размерность: $[U] = \text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$

Элементарное изменение потенциальной энергии.

- Пусть материальная точка совершила в некотором потенциальном поле элементарное перемещение $d\vec{r}$. Тогда силы, действующие на неё со стороны поля, совершили элементарную работу
- $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$.
- С другой стороны эта работа должна быть равна элементарной убыли потенциальной энергии
- $dA = -dU$.
- Отсюда следует, что $-dU = (\vec{F}, d\vec{r})$

Связь силы и потенциальной энергии.

- Предположим, что материальная точка двигалась вдоль оси ox, и координаты y и z оставались постоянными. Тогда $d\vec{r} = (dx, 0{,}0)$,
- и $\left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = F_x dx$
- Сравнивая это с выражением для элементарной работы, найдём
- $F_x dx = -dU.$
- Откуда находим
- $F_x = -\left.\frac{dU}{dx}\right|_{\substack{y=const \\ z=const}}.$

Частные производные.

- Производные от функций нескольких переменных по одному из аргументов, когда остальные остаются неизменными, называется частной производной и обозначается круглыми буквами ∂. Тогда
- $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$.
- Аналогично можно найти другие координаты вектора силы
- $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$.

Градиент.

- Вектор, координаты которого есть частные производные от некоторой функции по координатам x, y, z, называется градиентом этой функции и обозначается $\vec{\nabla}$ или $gra\vec{d}$.
- Таким образом, все три равенства связи силы и потенциальной энергии можно записать одним векторным
- $\vec{F} = gra\vec{d}U$ или $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.
- Это и есть связь между консервативной силой и потенциальной энергией поля.