Элементы теории графов

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

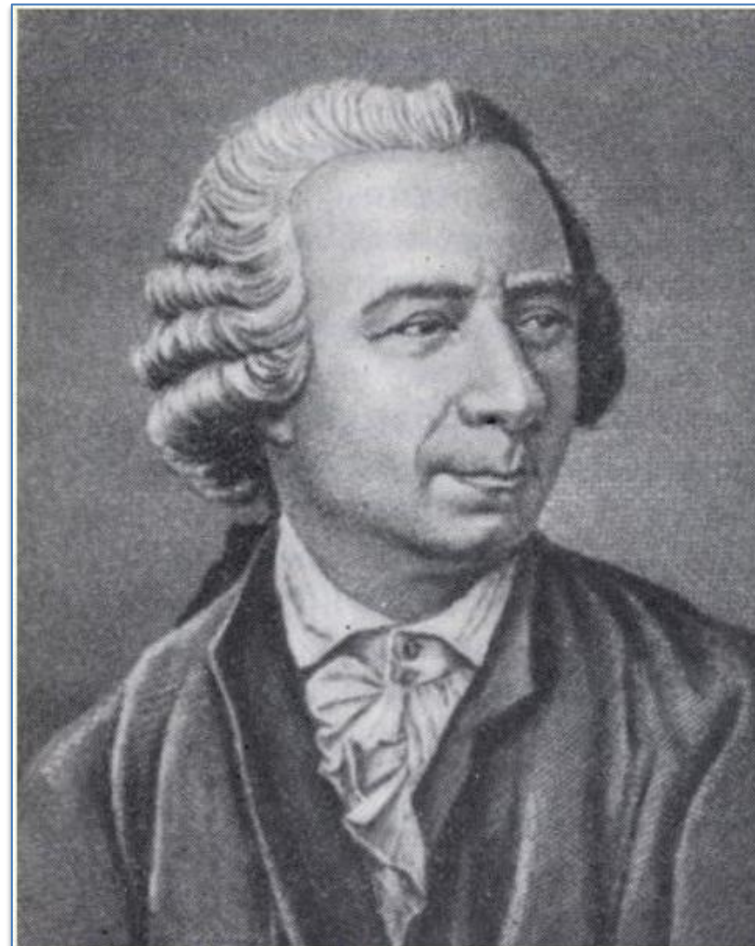
Теория графов в качестве дисциплины может рассматриваться как раздел дискретной математики, исследующий свойства конечных множеств с заданными отношениями между их элементами (изучение объектов).

Как прикладная дисциплина теория графов позволяет описывать и исследовать многие технические, экономические, биологические и социальные системы.

Особенно широкое применение теории графов в таких областях прикладной математики, как программирование, теория конечных автоматов, в решении вероятностных и комбинаторных задач.

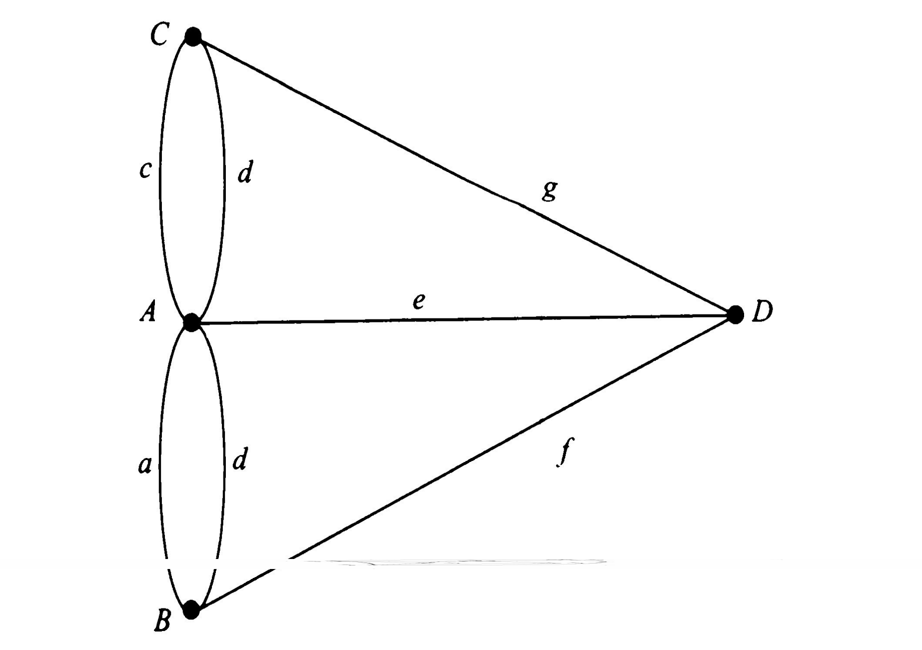
Основоположники

Родилась теория графов в Санкт-Петербурге. Ее создателем является Л. Эйлер, который в 1736 году опубликовал решение задачи о Кенигсбергских мостах.

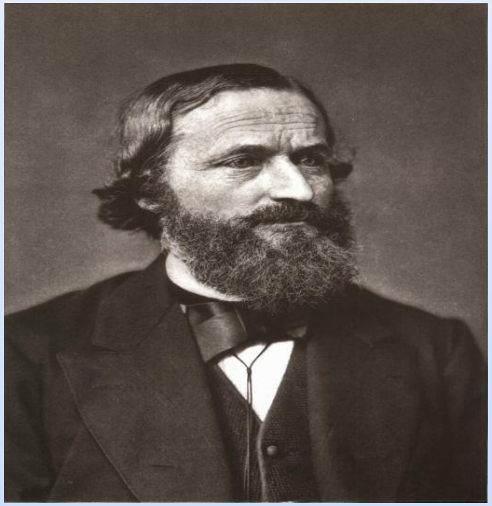


Задача о Кенигсбергских мостах.

В прусском городке Кенигсберг на реке Прегель семь мостов. Можно ли найти маршрут прогулки, который проходит ровно 1 раз по каждому из мостов и начинается и заканчивается в одном месте?



Модель задачи это граф, состоящий из множества вершин и ребер, соединяющих вершины. Вершины символизируют берега, реки и острова, а ребра обозначают семь мостов. Искомый маршрут соответствует обходу ребер графа таким образом, что каждое из них проходится только один раз. Проход ребра соответствует пересечению реки по мосту.



Кирх Гоф

Кэлли

Жордан

- В 1847 году Кирх Гоф разработал теорию деревьев для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений, позволяющую найти значение силы тока в каждом проводнике (дуге) и в каждом контуре рассматриваемой электрической цепи.

- Кэлли в 1857 году, занимаясь чисто практическими задачами органической химии, открыл важный класс графов, называемый деревьями.

- Жордан (1869 год), независимо от Кэлли, ввел и изучал деревья как чисто математические объекты, совершенно не подозревая о значении своего открытия для современной химической науки.

Д.Кениг

Л.В.Канторович

Начало бурного развития и практического применения теории графов было положено венгерским математиком Д. Кенигом, который опубликовал в 1936 г. монографию «Теория конечных и бесконечных графов». Российский академик Л. В. Канторович разработал метод решения транспортных задач для их сетевой постановки.

1. Основные понятия теории графов

Граф представляет собой непустое конечное множество вершин V и ребер E, оба конца которых принадлежат множеству V. Обозначать граф будем $G(V,E)=(V,E),\ V\neq\phi,\ E\subseteq V\times V$.

При изображении графов на рисунках или схемах ребра могут быть прямолинейными или криволинейными; длины ребер и расположение вершин произвольны.

Вершины, которые не принадлежат ни одному ребру, называют *изолированными.* Обозначать вершины будем $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ т. е. V={$v_1, v_2, \dots, v_n$}

Пусть v_1, v_2 - вершины, $e=\langle v_1, v_2\rangle$ - соединяющие их ребро. Тогда вершина v_1 и ребро *инцидентны.* Вершина v_2 и ребро e также *инцидентны.* Два ребра (вершины) инцидентны одному ребру) инцидентные одной вершине, называются *смежными.*

Число вершин графа *G* обозначим *p*, а число ребер – *q*

$$p: p(G)=|V|;\ q: q(G)=|E|$$

Граф называется *полным,* если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром.

2. Степень вершины

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина. Еще называют его *валентностью* и обозначают ***d(v)***, **deg(*v*)**. Вершина графа, для которой ***d(v)=0***, *является изолированной, если* ***d(v)=1***, то *висячей*.

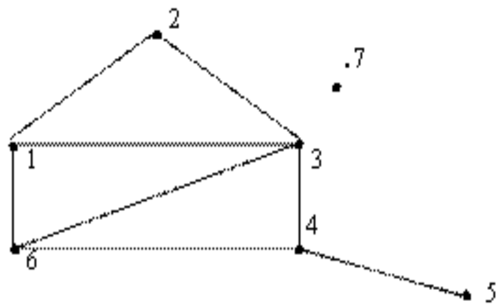


Рис 2.1

Deg(6)=3, deg(5)=1, 5 – висячая вершина
N(3)={2,1,6,4}, deg(7)=0, 7 – изолированная вершина

Вершина называется нечетной, если *d(v)* – *нечетное число*, четной если *d(v)* – *четное число*. Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.

Свойства степени вершины

I. В графе ***G(V,E)*** сумма степеней всех его вершин – число четное, равное удвоенному числу ребер графа.
II. Число нечетных вершин любого графа четно.
III. Во всяком графе с n вершинами, где $n \geq 2$ всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями.
IV. Если в графе с n вершинами $(n \geq 2)$ в точности две вершины имеют одинаковую степень, то в этом графе всегда найдется либо в точности одна вершина степени ***0***, либо в точности одна вершина степени ***n-1***.

3. Маршруты, цепи, циклы

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента инцидентны:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$$

Если $v_0 = v_k$, то *маршрут замкнут,* в противном случае *открыт.*

Если все ребра различны, то маршрут называется *цепью.*

Если все вершины различны, то маршрут называется *простой цепью.* В цепи $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются концами цепи, т. е. цепь концами v_0 и v_k соединяет вершины v_0 и v_k. Цепь, соединяющая вершины v_0 и v_k, обозначается (v_0 и v_k).

Замкнутая цепь называется циклом, *замкнутая простая – простым циклом,* число циклов обозначается *z(G)*. Граф без циклов – *ациклический.*

Длинной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями).

Если маршрут $M = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$ то длина маршрута *M* равна *k*, обозначается $|M| = k.$

4. Связность графов

Две вершины графа *называются связными,* если существует соединяющая их простая цепь. В противном случае две вершины называются *несвязными.*

Граф называется связным, если каждые две вершины связные.

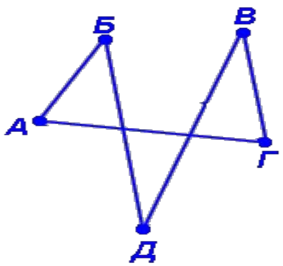


Рис 4.1

Так, на рисунке любая пара вершин, взятая из набора А, Б,В,Г,Д ,будет связной, т.к. от любой из них к любой можно "пройти" по ребрам графа.

Граф *называется несвязным,* если хотя бы две его вершины несвязные.

Вершины Ж и З из набора Е,Ж,З, не будут связными, так как от одной к другой "пройти" по ребрам не удается.

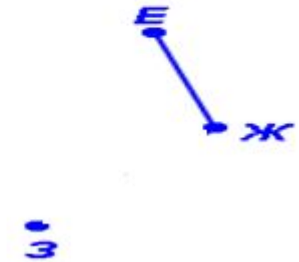
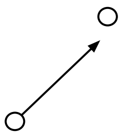


Рис 4.2

5. Ориентированные графы

Если элементы множества ***E*** графа ***G(V, E)*** – упорядоченные пары, то граф называется *ориентированным* или *орграфом.*

Ребро графа называется ориентированным, если одну вершину ребра считают началом ребра а другую концом, на рисунке изображают стрелкой между вершинами. Граф у которого все ребра ориентированы – *ориентированный.*



Ориентированное ребро

Рис 5.1

Неориентированное ребро

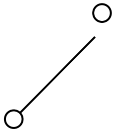


Рис 5.2

Одна и та же вершина ориентированного графа может служить началом для одних ребер и концом для других, поэтому различают две степени вершины:

- *Степенью выхода* вершины орграфа – число ***выходящих*** из вершины ребер;
- *Степенью входа* вершины орграфа – число ***входящих*** в вершину ребер.

В орграфах в зависимости от сочетания степеней входа и выхода для данной вершины рассматриваются три случая:

- ***Изолированной*** вершиной называется вершина у которой степень входа и степень выхода равны 0;
- ***Источником*** называется вершина, степень выхода которой положительна, а степень входа равна 0;
- ***Стоком*** называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна 0.

Путем в ориентированном графе называется последовательность ориентированных ребер.

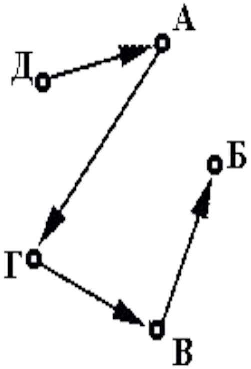


Рис 5.3

Простым путем в ориентированном графе называется путь, в котором ни одна вершина не содержится более одного раза (Рис 5.3). На рис 5.4 изображен путь, не являющийся простым.

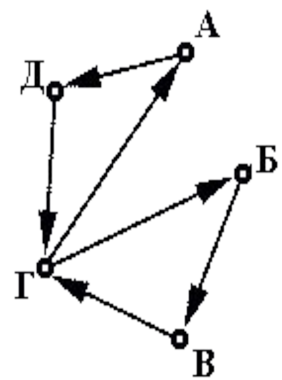
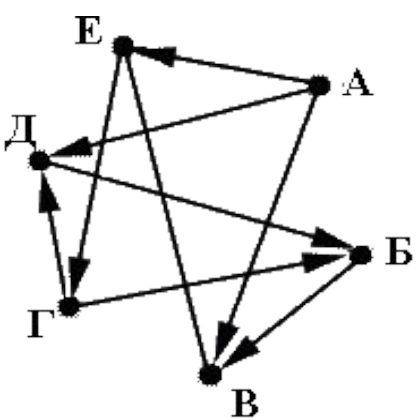


Рис 5.4

Замкнутый путь в ориентированном графе называется ориентированным циклом или контуром. Длиной пути называется число ребер в этом пути.

Полным ориентированным графом называется граф, каждая пара вершин которого соединена в точности одним ориентированным ребром. Если ребра полного графа неориентированные, то граф соответственно будет полным неориентированным.



Ориентированный граф

Петлей называется ребро, у которого начальная и конечная вершины совпадают. Петля обычно считается неориентированной.

Мультиграфом называется граф, в котором пара вершин соединяется несколькими различными ребрами. Для ориентированного мультиграфа вершины v_i и v_j могут соединятся несколькими ребрами в каждом из направлений.

6. Изоморфизм графов

Два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называются изоморфными, если между множествами их вершин существует биективное (взаимно-однозначное) соответствие, такое, что вершины соединены ребрами в одном из графов в том и только в том случае, когда соответствующие им вершины соединены в другом графе.

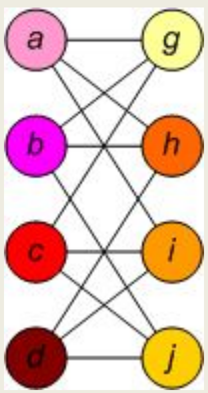
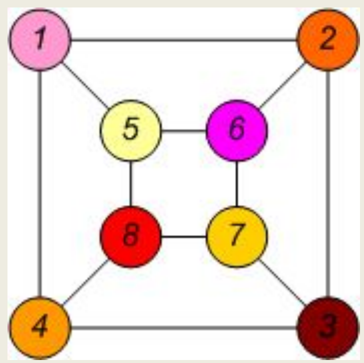
Если ребра графа ориентированы, то их направление в изоморфных графах должно совпадать. Изоморфизм есть отношение эквивалентности, так как обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности. Для того чтобы граф G_1 был изоморфен графу G_2, необходима такая подстановка, которая бы установила взаимно-однозначное соответствие между вершинами графа и их ребрами.

При замене графа любым ему изоморфным все свойства графа сохраняются. Строго говоря, графы, отличающиеся только нумерацией вершин, являются изоморфными.

Алгоритм распознавания двух графов $G_1(X;E)$ и $G_2(Y;E)$

1. Подсчитываем число вершин каждого графа (число вершин должно совпадать, в противном случае графы неизоморфные).
2. Выписываем все элементы обоих графов в естественной упорядоченности и определяем пары $(x_i;x_j)$ и $(y_i;y_j)$ для каждого элемента, где $x_i;y_j$ - число исходов для каждой вершины графов G_1 и G_2, а $x_i;y_j$ - число заходов для соответствующих графов.
3. Для каждого элемента $\boldsymbol{x}$ графа G_1 ищем такой элемент у графа G_2, что выполняется условие: число исходов $\boldsymbol{x}$ совпадает с числом исходов $\boldsymbol{y}$, и число заходов $\boldsymbol{x}$ совпадает с числом заходов y. Найденные элементы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ соединяем ребром, т. е. строим граф соответствия (если соответствия нет, то графы не изоморфны).
4. Выписываем подстановку, которая переводит граф G_1 в граф G_2.

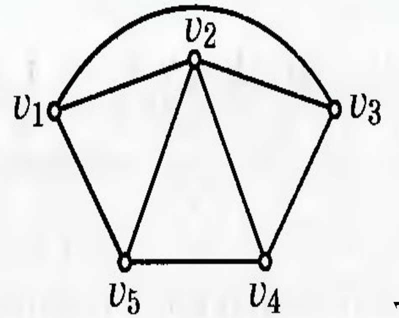
Пример «Изоморфизма графов»

<table>
<tr><th>Граф G_1</th><th>Граф G_2</th><th>Изоморфизм между графами G_1 и G_2</th><th>Подстановка изоморфизма f</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>$f(a) = 1$
$f(b) = 6$
$f(c) = 8$
$f(d) = 3$
$f(g) = 5$
$f(h) = 2$
$f(i) = 4$
$f(j) = 7$</td><td>$\begin{pmatrix} a & b & c & d & g & h & i & j \\ 1 & 6 & 8 & 3 & 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

7. Плоские графы

Граф $G(V,E)$ называется *плоским*, если на плоскости его можно изобразить так, чтобы все пересечения его ребер являются вершинами графа

$G(V,E)$.



Плоский граф

Рис 7.1

В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани (рис 7.1). Гранью в плоском представлении графа называется *часть плоскости*, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов.

8. Операции над графами

a) *Дополнением графа* $G_1(V_1, E_1)$ называется граф $\overline{G}_1(V_1, \overline{E}_1)$, множеством вершин которого является множество V_1, а множеством его ребер является множество $\overline{E}_1 = \{ e \in V_1 \times V_1 : e \notin E_1 \}$.

b) *Объединением графов* $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \phi;\ E_1 \cap E_2 = \phi$, называется граф $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его ребер является множество $E_1 \cup E_2$.

c) *Пересечением графов* $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$ множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством его ребер – множество $E_1 \cap E_2$.

d) *Суммой по модулю два* графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \phi;\ E_1 \cap E_2 = \phi$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его ребер – множество $E_1 \oplus E_2$.
Другими словами, этот граф не имеет изолированных вершин и состоит только из ребер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором, но не в обоих графах одновременно.

9. Способы задания графов

Аналитический способ задания графов

Граф *G(V,E)* задан, если задано множество элементов *V* и отображение *E* множества *V* в *V*. Отображение *E* может быть как однозначным, так и многозначным. В общем случае на *V* и *E* никаких ограничений не накладывается.

Пусть дано множество $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, которое имеет мощность $|V| = n$. Вместо $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ иногда пишут $V = \{v_i\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Для того чтобы задать отображение *E* на *V* или, что то же самое, отображение *V* в *V*, необходимо каждому элементу $v_i \in V$ поставить в соответствие *E*. Это подмножество обозначают через E_{vi}, поэтому $E_{vi} \subset V$.

Другой формой аналитического способа задания является задание графа как совокупности множества элементов *V* и подмножества упорядоченных пар $\langle v_i, v_j \rangle \in V \times V$. Подмножество множества пар $\langle v_i, v_j \rangle$ декартова произведения $V \times V$ эквивалентно бинарному отношению *R*, заданному на множестве *V*. Поэтому множество *V* и бинарное отношение *R* на множестве *V* также определяет некоторый граф *G*.

Геометрический способ

Множество элементов V графа G изображают кружками, это множество вершин. Каждую вершину $v_i \in V$ соединяют линиями с теми вершинами $v_i \in V$, для которых выполняется условие $v_i \in V_{v_i}$. Множество линий, которое соответствует множеству упорядоченных пар $\langle v_i, v_j \rangle$, есть множество ребер графа.

Матричный способ

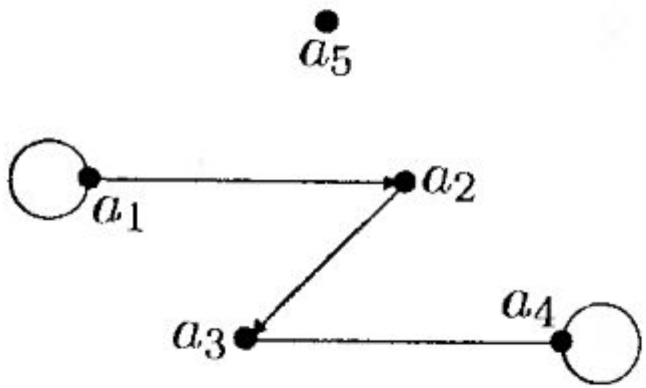
Квадратная матрица элементами которой являются нули и единицы, а также некоторое число *m*, называется матрицей смежности графа *G(V,E)* тогда и только тогда когда ее элементы образуются по следующему правилу: элемент $a_{i,j}$, стоящий на пересечении $v_i - го$ столбца, равен единице, если имеется ребро, идущие из вершины v_i в вершину v_j, и a_{i-j} равен нулю в противном случае. Элемент $a_{i,j}$ равен единице, если при вершине v_i имеется петля, и равен нулю в противном случае. Элемент a_{i-j} равен некоторому числу *m*, где *m* – число ребер графа, идущее из вершины v_i в вершину v_j.

Пусть $v_1,...,v_n$, - вершины, а $e_1,...,e_m$ - ребра некоторого ориентированного графа G(V,E). Матрица размером (n x m), где называется матрицей инцидентности для ориентированного графа.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \; если \; e_i \; исходит \; из \; v_1; \\ -1, \; если \; e_i \; заходит \; в \; v_1; \\ 0, \; если \; e_i \; не \; инцидентна \; v_1; \end{cases}$$

Матрица смежности

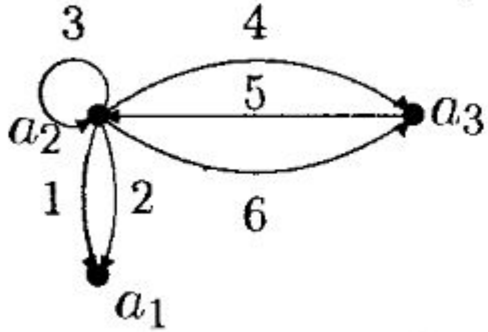
Граф



Матрица

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица инцидентности



$$B_G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Эйлеровы графы

Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

Эйлеровым циклом или *эйлеровой цепью* называется цикл, содержащий все ребра графа и притом по одному разу. Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется эйлеровым графом.

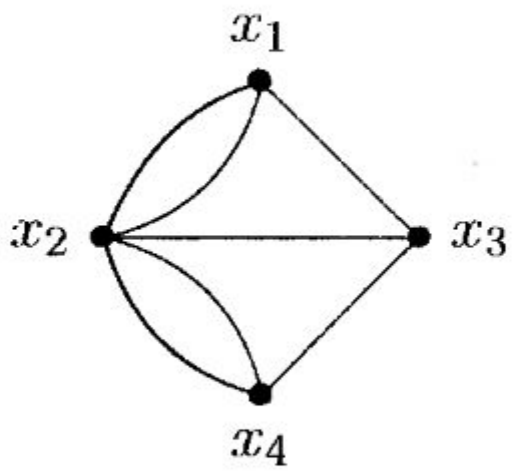
Замкнутую линию, если ее можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, проходя при этом каждый участок в точности один раз, принято называть уникурсальной. Рисунок графа, обладающего эйлеровым путем или циклом, является уникурсальной линией.

Теорема 1. Если граф G(V,E) обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные.

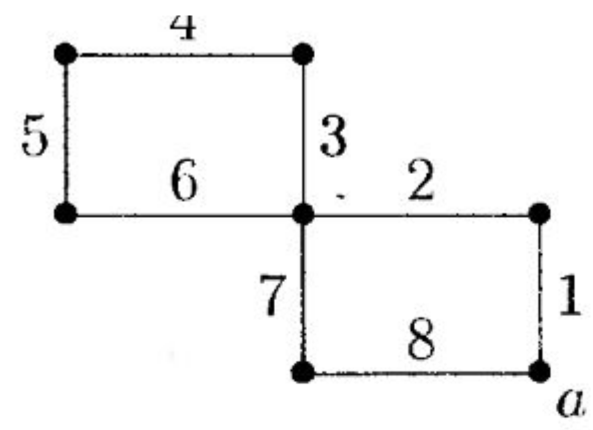
Теорема 2. Если граф G(V,E) связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом.

Примеры

Граф, не являющийся эйлеровым



Эйлеров граф



Гамильтоновы графы

Граф, обладающий гамильтоновым циклом, называется гамильтоновым графом. Гамильтоновым циклом, называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу.

Эйлеровы и гамильтоновы пути сходны по способу задания. Первые содержат все ребра, и притом по одному разу, вторые – все вершины по одному разу. Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четные.

Условия существования гамильтоновых циклов

1. Всякий полный граф является гамильтоновым, так как содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.
2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие ребра, то он также является гамильтоновым.
3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

Достаточные условия

Несмотря на схожесть задач о нахождении эйлеровых и гамильтоновых циклов, решение последней значительно сложнее. Известны следующие достаточные условия существования гамильтоновых циклов в связном неорграфе G без петель, имеющем $n \geqslant 3$ вершин:

Теорема . *Если для любых двух различных несмежных вершин a и b графа G выполняется условие $\deg a + \deg b \geqslant n$, то существует гамильтонов цикл.*

Достаточные условия

Следствие . *Если для любой вершины a графа G выполнено условие $\deg a \geqslant n/2$, то существует гамильтонов цикл.*

11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕРЕВА

- Связный неориентированный ациклический граф называется деревом. Множество деревьев называется лесом.
- Остовным деревом графа называется его подграф, содержащий все вершины графа.

ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО

- Пусть теперь каждому ребру *x* *X* связного графа *G=(V,X*) с непустым множеством ребер *X* поставлена в соответствие величина *l(x)* – длина ребра *x*, т.е. граф *G* является нагруженным. Приведем алгоритм, позволяющий найти остовное дерево графа *G* с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер (по сравнению со всеми другими остовными деревьями графа *G*).
- *Определение. Остовное дерево связного нагруженного граф G с минимальной суммой длин содержащихся в нем ребер будем называть* ***минимальным остовным***

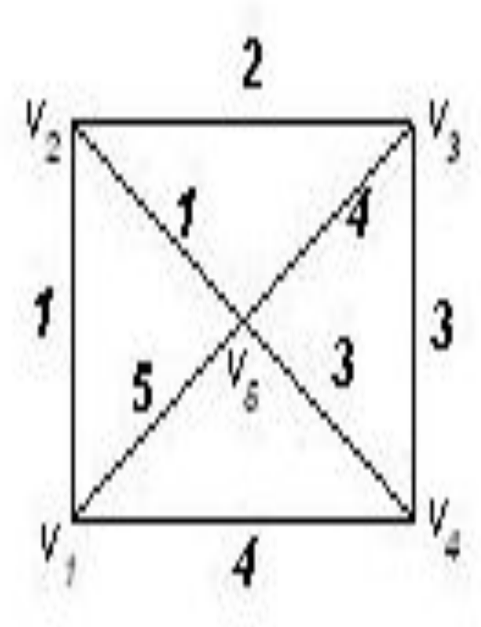
  деревом *(МОД) графа G****.***

ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО

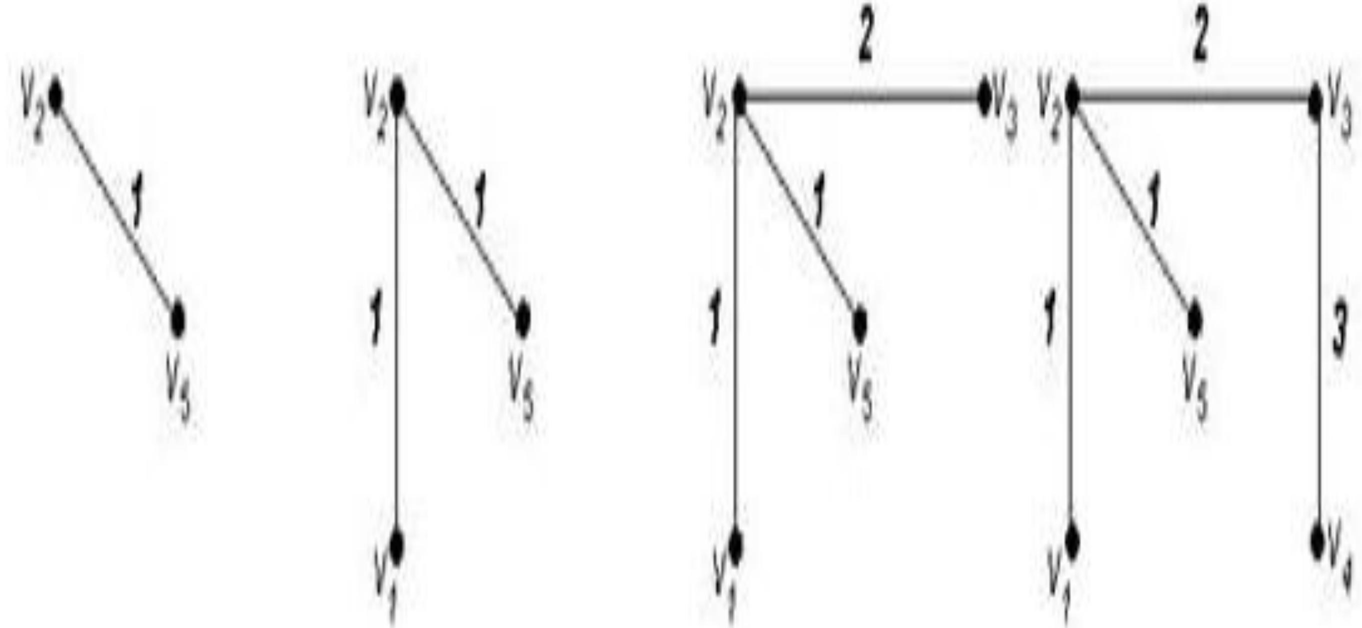
- *Алгоритм выделения МОД нагруженного связного графа G:*
- *Шаг 1.* Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_2 графа G. Положим $i=2$.
- *Шаг 2.* Если $i=n$, где $n=n(G)$, то задача решена, и G_i – искомое МОД графа G. В противном случае переходим к шагу 3.
- *Шаг 3*. Строим граф G_{i+1}, добавляя к графу G_i новое ребро минимальной длины, выбранное среди всех ребер графа G, каждое из которых инцидентно к какой-нибудь вершине графа G_i и одновременно инцидентно какой-нибудь вершине графа G, не содержащейся в G_i. Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и инцидентные ему вершины, не содержащиеся в G_i. Присваиваем $i:=i+1$ и переходим к шагу 2.

ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО

- Определить МОД нагруженного графа *G*, изображенного на рис., используя алгоритм.



ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО



Кратчайшие пути на графе

- Рассматриваемый алгоритм определяет расстояния между вершинами в простом орграфе с неотрицательными весами. К таким орграфам сводятся многие типы графов. Если граф не является простым, его можно сделать таковым, отбрасывая все петли и заменяя каждое множество параллельных ребер кратчайшим ребром (ребром с наименьшим весом) из этого множества; каждое неориентированное ребро заменяется парой ориентированных ребер. Если граф не взвешен, то можно считать, что все ребра имеют один вес.

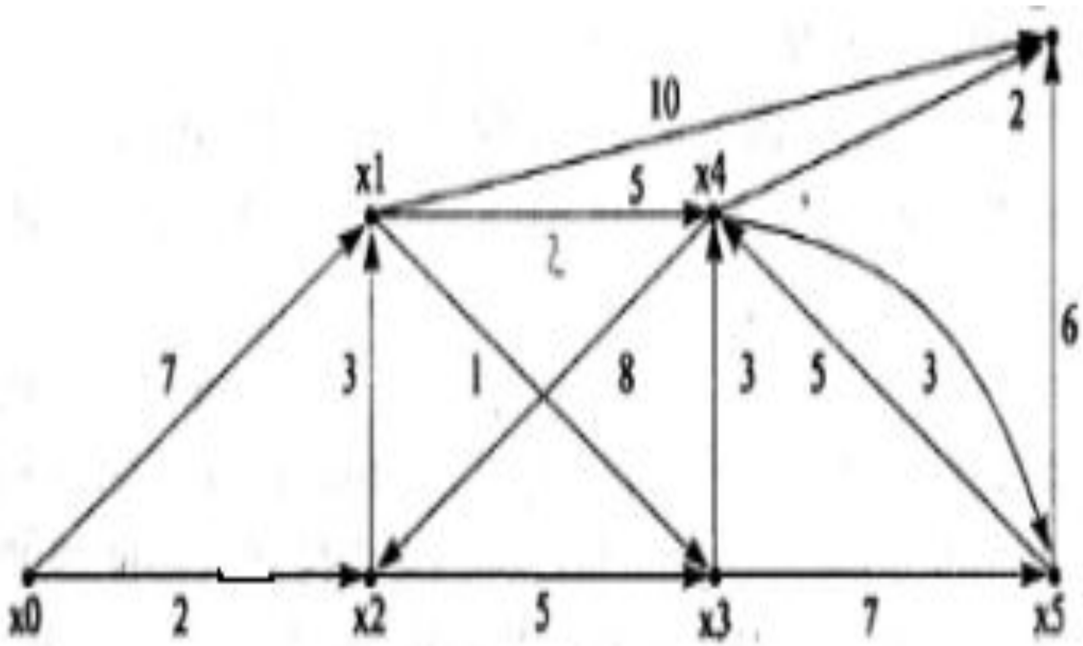
Кратчайшие пути на графе

- Вначале вершине x_0 присваивается окончательная метка 0 (нулевое расстояние до самой себя), а каждой из остальных вершин присваивается временная метка (бесконечность). На каждом шаге одной вершине с временной меткой присваивается окончательная и поиск продолжается дальше. На каждом шаге метки меняются следующим образом.

1. Каждой вершине x_j, не имеющей окончательной метки, присваивается новая временная метка — наименьшая из ее временной и числа *(w_{ij}+* окончательная метка x_i*),* где x_i — вершина, которой присвоена окончательная метка на предыдущем шаге.
2. Определяется наименьшая из всех временных меток, которая и становится окончательной меткой своей вершины. В случае равенства меток выбирается любая из них.

- Циклический процесс п.1+п.2 продолжается до тех пор, пока вершина z не получит окончательной метки. Легко видеть, что окончательная метка каждой вершины — это кратчайшее расстояние от этой вершины до начала x_0.

Кратчайшие пути на графе



Простой взвешенный орграф

Кратчайшие пути на графе

	x0	x1	x2	x3	x4	x5	z
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1		7	2	∞	∞	∞	∞
2		5		7	∞	∞	∞
3				6	10	∞	15
4					9	13	
5						12	11