



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**ЛЕГИОН**  
www.legionr.ru

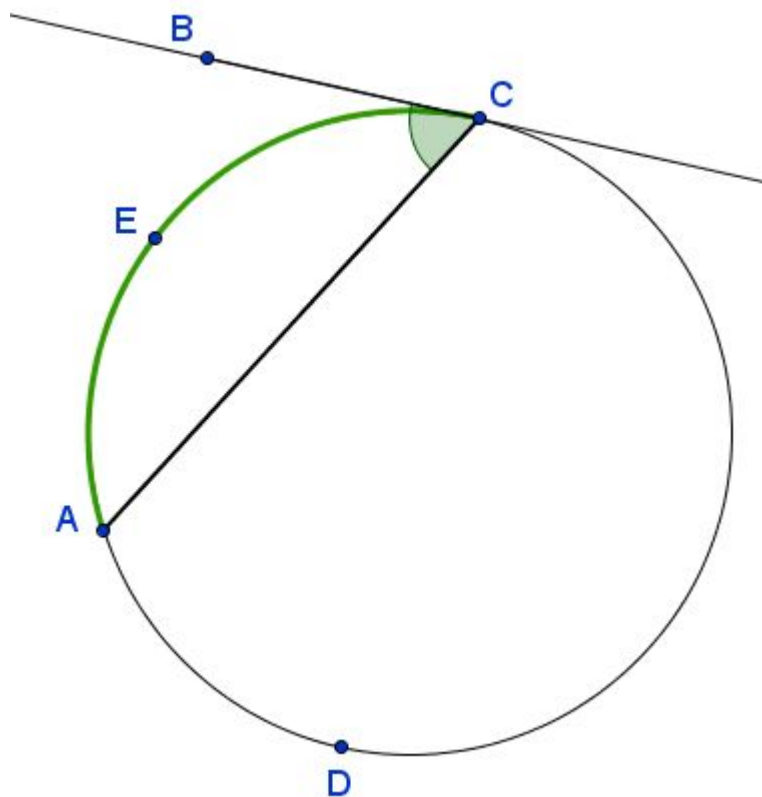
Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009  
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию  
в общеобразовательных учреждениях

**Ростов-на-Дону**  
**(863) 303-05-50**

# Окружность в планиметрических задачах повышенного уровня ОГЭ и ЕГЭ

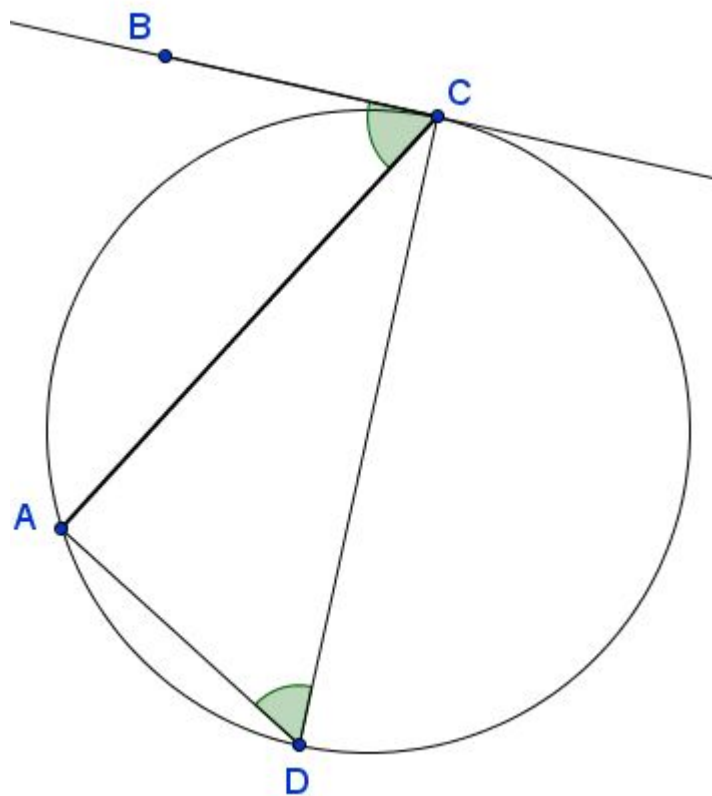
докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

**Теорема.** Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.



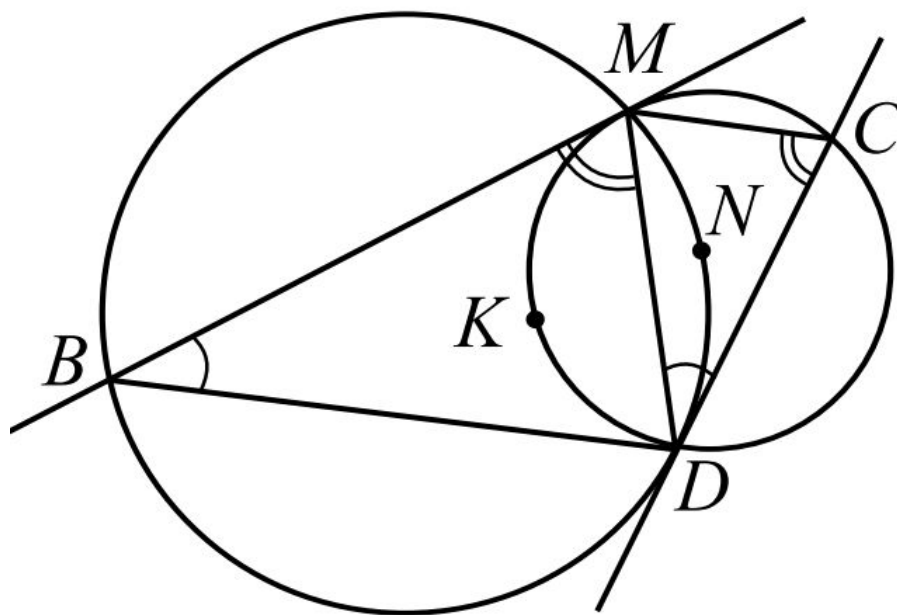
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AEC}$$

## Полезное следствие

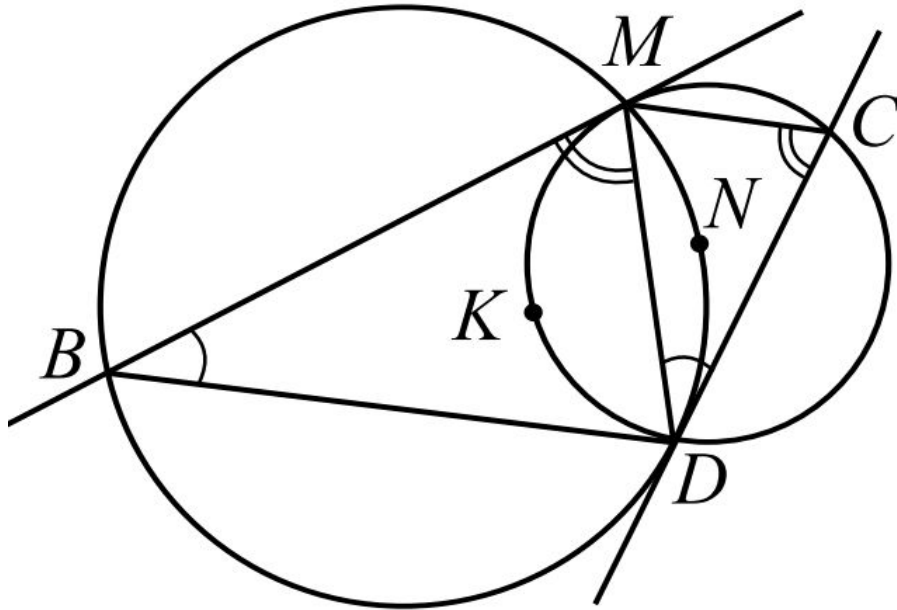


$$\angle ACB = \angle ADC$$

- 26** Даны две окружности, пересекающиеся в точках  $M$  и  $D$ .  $MB$  и  $CD$  — касательные к первой и второй окружностям,  $B$  и  $C$  — точки на окружностях.  $CD = 10$ ,  $MB$  в 2 раза больше  $CD$ . Найдите  $MC$ , если периметр  $MBDC$  равен 45.



## Решение



Угол между касательной  $MB$  и хордой  $MD$  равен углу  $MCD$ , опирающемуся на дугу  $MKD$ , то есть  $\angle MCD = \angle BMD$ . Аналогично  $\angle MBD = \angle MDC$ .

$$\triangle MCD \sim \triangle DMB, \text{ то есть } \frac{MC}{DM} = \frac{CD}{MB} \text{ и } \frac{MD}{DB} = \frac{CD}{MB}.$$

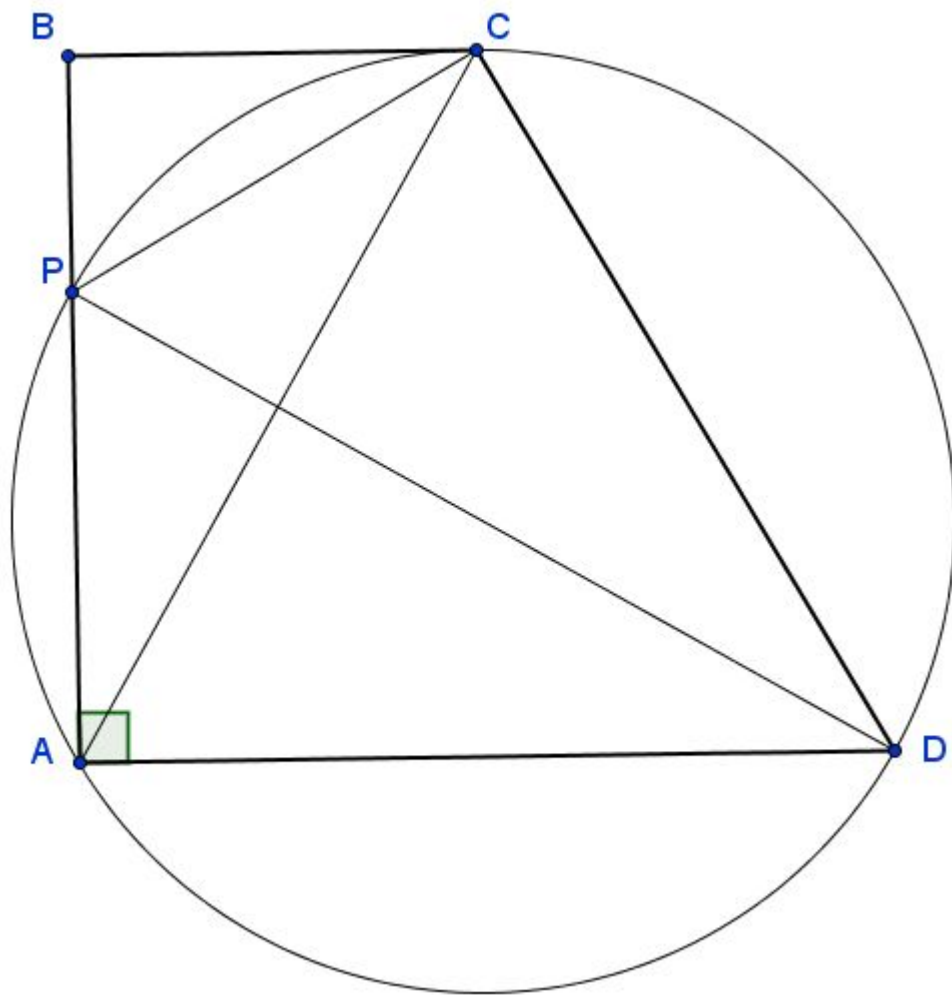
Перемножая полученные равенства, получаем  $\frac{MC}{BD} = \frac{DC^2}{MB^2}$ . Обо-

значим  $MC = x$ ,  $BD = 45 - (10 + 20 + x) = 15 - x$ , тогда

$$\frac{x}{15 - x} = \left(\frac{10}{20}\right)^2; 4x = 15 - x; 5x = 15; x = 3. \text{ Отсюда } MC = 3.$$

Ответ: 3.

- 16** Окружность, проходящая через вершины  $A$ ,  $C$  и  $D$  прямоугольной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , пересекает меньшую боковую сторону  $AB$  в точке  $P$  и касается прямой  $BC$ . Известно, что  $AD = CD$ .
- а) Докажите, что  $CP$  — биссектриса угла  $ACB$ .
- б) В каком отношении прямая  $DP$  делит площадь трапеции?





## Решение

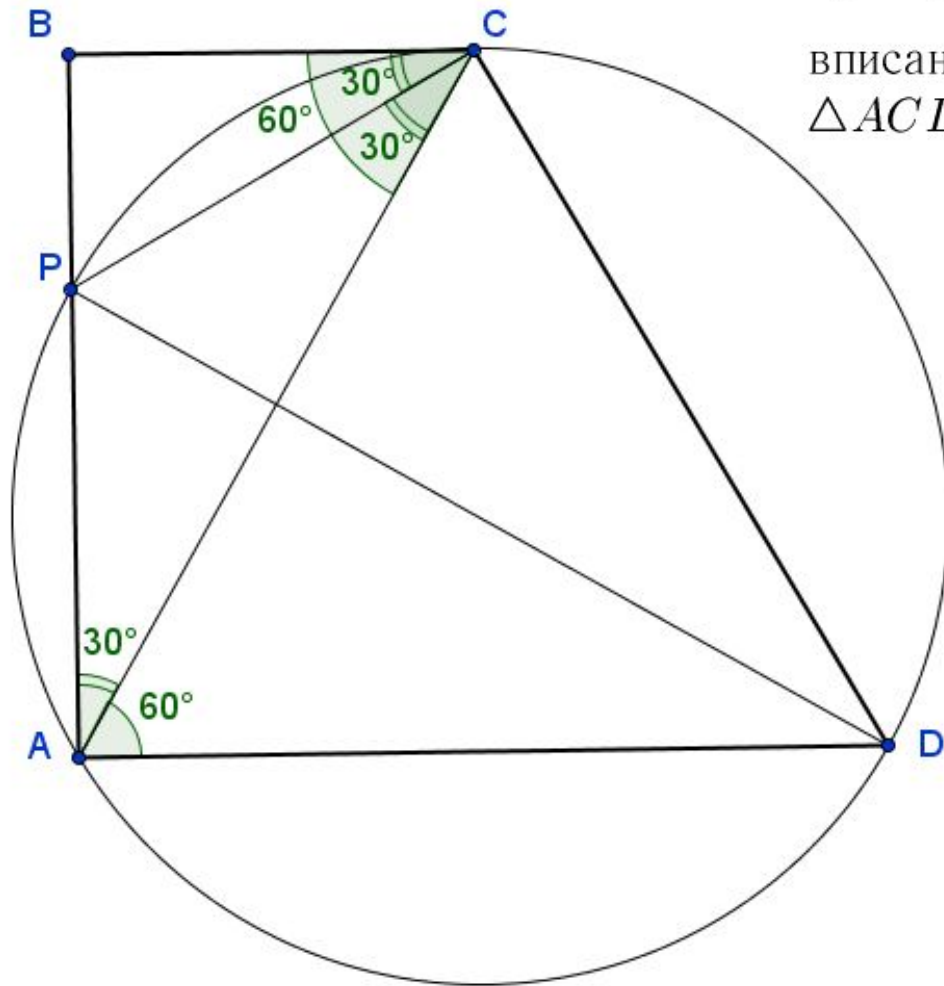
а) 1. Так как  $AD = CD$ , то  $\triangle ACD$  равнобедренный.  
Значит,  $\angle CAD = \angle ACD$ .

2.  $\angle CAD = \angle ACB$  как накрест лежащие при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $AC$ .

3.  $\angle ACB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$  как угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания. Но  $\angle ADC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$  как вписанный угол. Значит,  $\angle ACB = \angle ADC$ . Таким образом,  $\triangle ACD$  равносторонний и  $\angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$ .

4.  $\angle PCB = \frac{1}{2} \overset{\frown}{PC}$  как угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания. Но  $\angle PAC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{PC}$  как вписанный угол. Значит,  $\angle PCB = \angle PAC$ .

5. Так как  $\angle PAC = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , то  $\angle PCA = \angle ACB - \angle PCB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ , то есть  $\angle PCB = \angle PCA$  и  $CP$  — биссектриса  $\angle ACB$ .



## Решение

б) 1. Обозначим сторону равностороннего треугольника  $ACD$  через  $a$ . Тогда в прямоугольном  $\triangle ABC$   $AC = a$ ,  $BC = \frac{a}{2}$  как катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ . По теореме Пифагора  $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

$$2. S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

3. Так как  $CP$  — биссектриса  $\triangle ABC$ , то

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}.$$

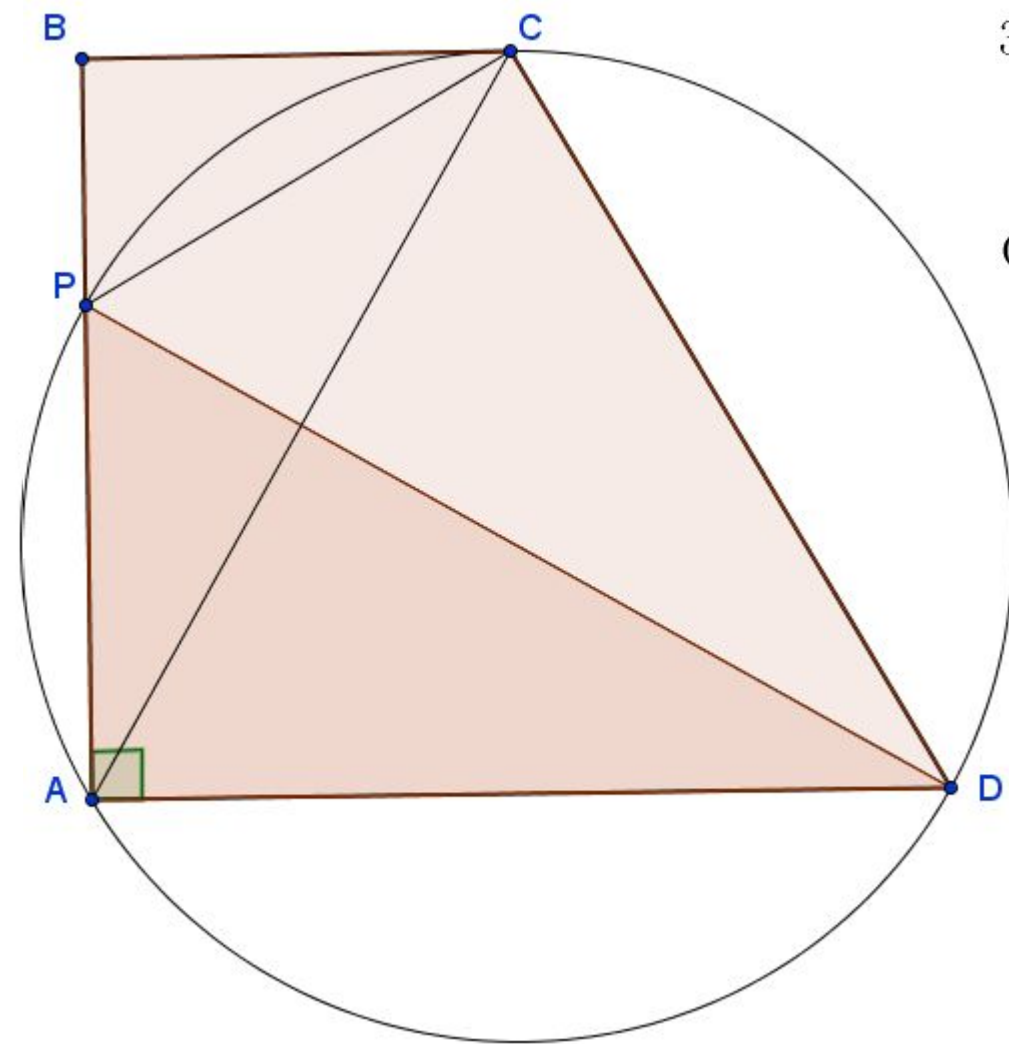
Отсюда,  $PA = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$$4. S_{PAD} = \frac{1}{2} \cdot PA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

$$5. S_{BCDP} = S_{ABCD} - S_{PAD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \frac{5}{24}a^2\sqrt{3}.$$

$$6. S_{BCDP} : S_{PAD} = \frac{5}{24}a^2\sqrt{3} : \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = 5 : 4.$$

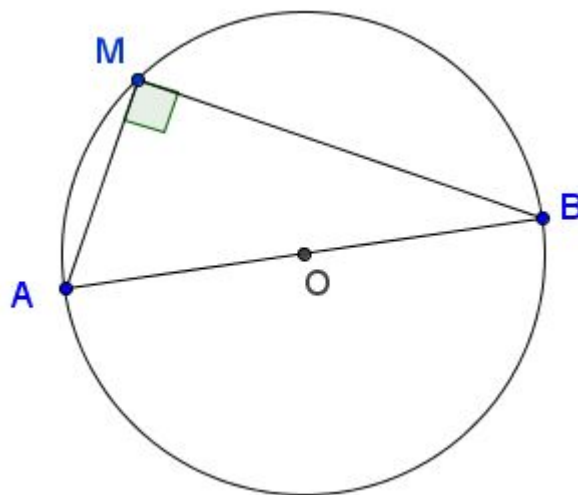
Ответ: 5 : 4.



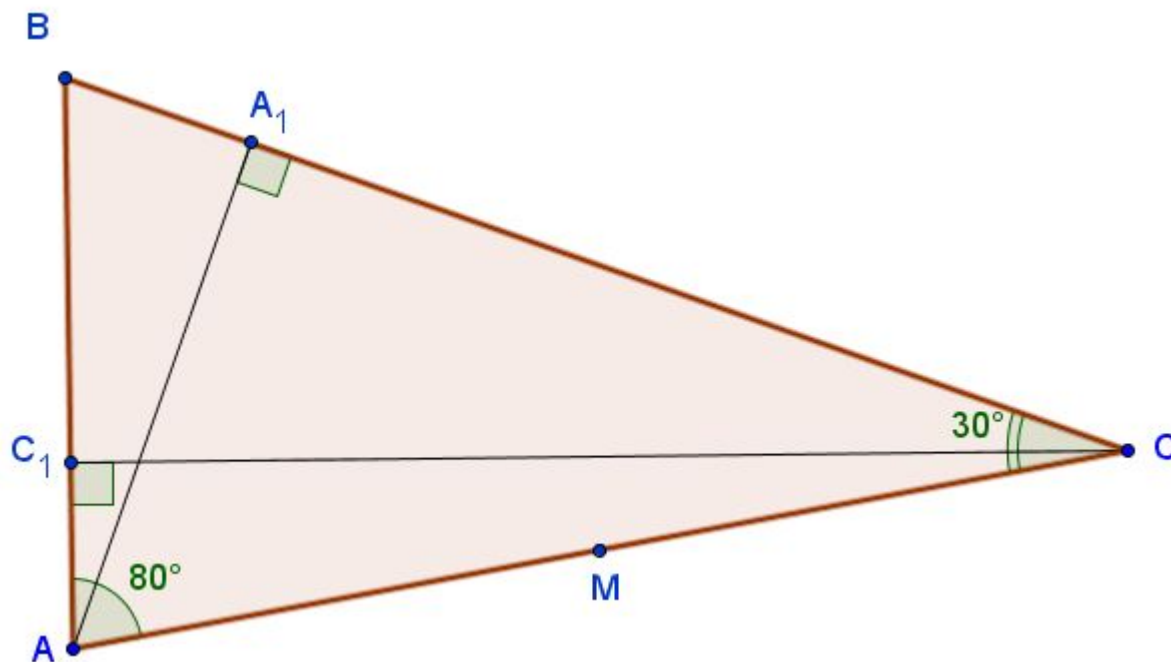


## Замечательное свойство окружности

Геометрическое место точек  $M$ , из которых отрезок  $AB$  виден под прямым углом ( $\angle AMB = 90^\circ$ ), есть окружность с диаметром  $AB$  без точек  $A$  и  $B$ .



- 24** Точка  $M$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $\angle BAC = 80^\circ$ ,  $\angle BCA = 30^\circ$ . В треугольнике проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Найдите величину угла  $A_1MC_1$ .

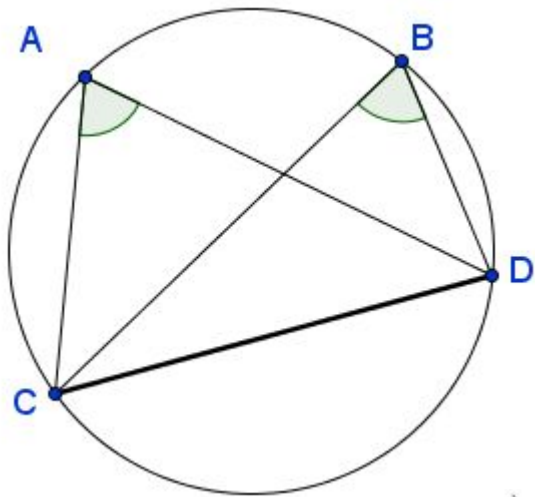
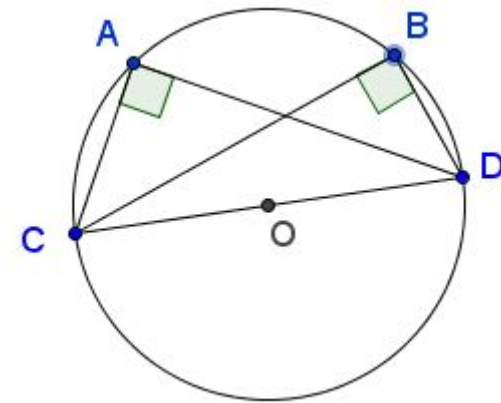
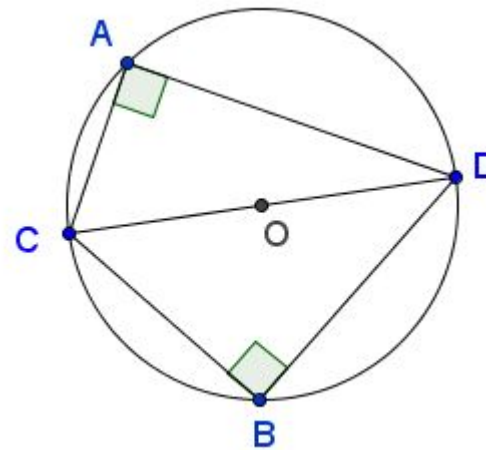




## Условие принадлежности четырёх точек одной окружности

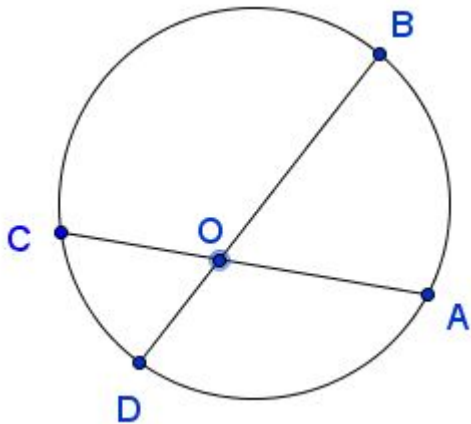
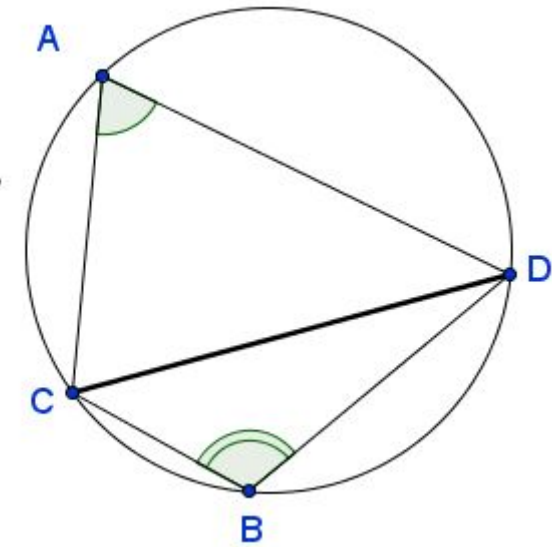
Если выполняется одно из следующих условий, то четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной окружности.

а)  $\angle CAD = \angle CBD = 90^\circ$ .



б) Точки  $A$  и  $B$  лежат по одну сторону от прямой  $CD$  и  $\angle CAD = \angle CBD$ .

в) Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $CD$  и  $\angle CAD + \angle CBD = 180^\circ$ .

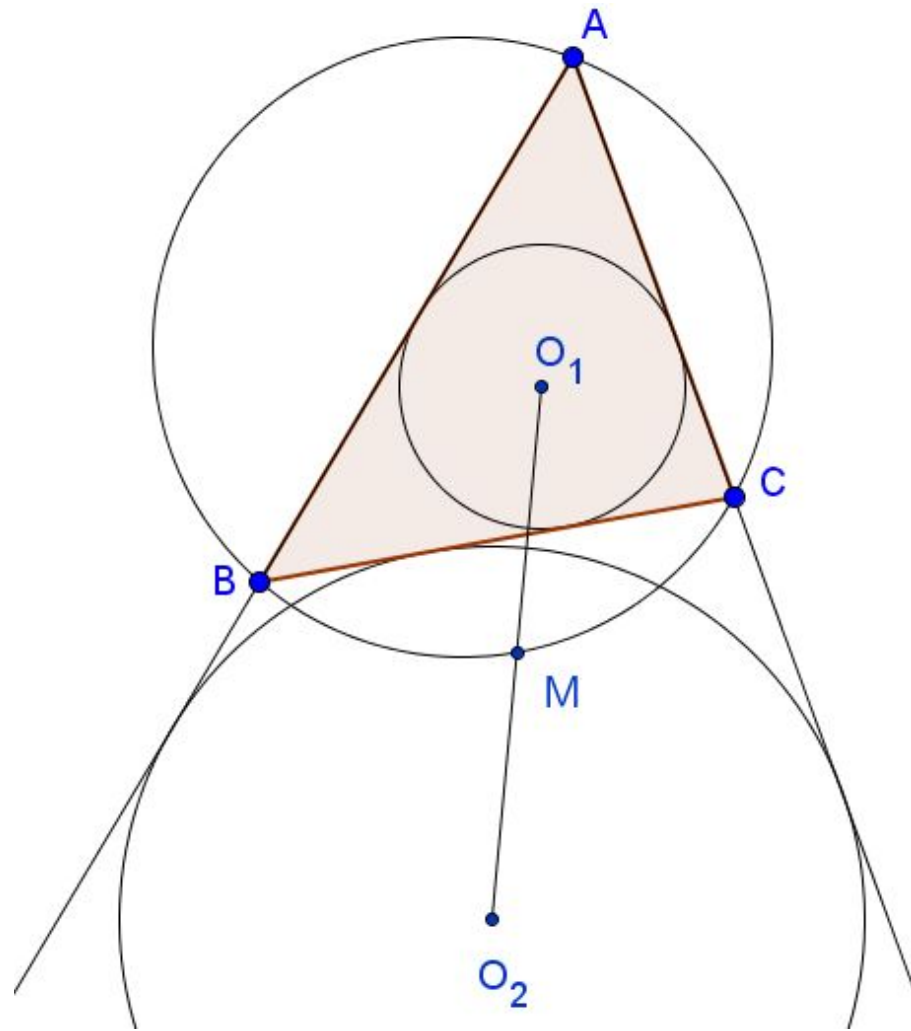


г) Прямые  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$  и  $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ .

16. Пусть  $O_1$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $O_2$  — центр внеписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны  $BC$ .

а) Докажите, что  $O_1M = MO_2$ , где  $M$  — точка пересечения отрезка  $O_1O_2$  и описанной окружности треугольника  $ABC$ .

б) Найдите  $O_1O_2$ , если  $BM = 5$ .





## Решение

а) Так как  $O_1C$  — биссектриса  $\angle ACB$ , а  $O_2C$  — биссектриса  $\angle BCD$ , то  $\angle O_1CO_2 = \angle O_1CB + \angle BCO_2 = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle BCD) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$  (см. рис. ).

Аналогично,  $\angle O_1BO_2 = 90^\circ$ .

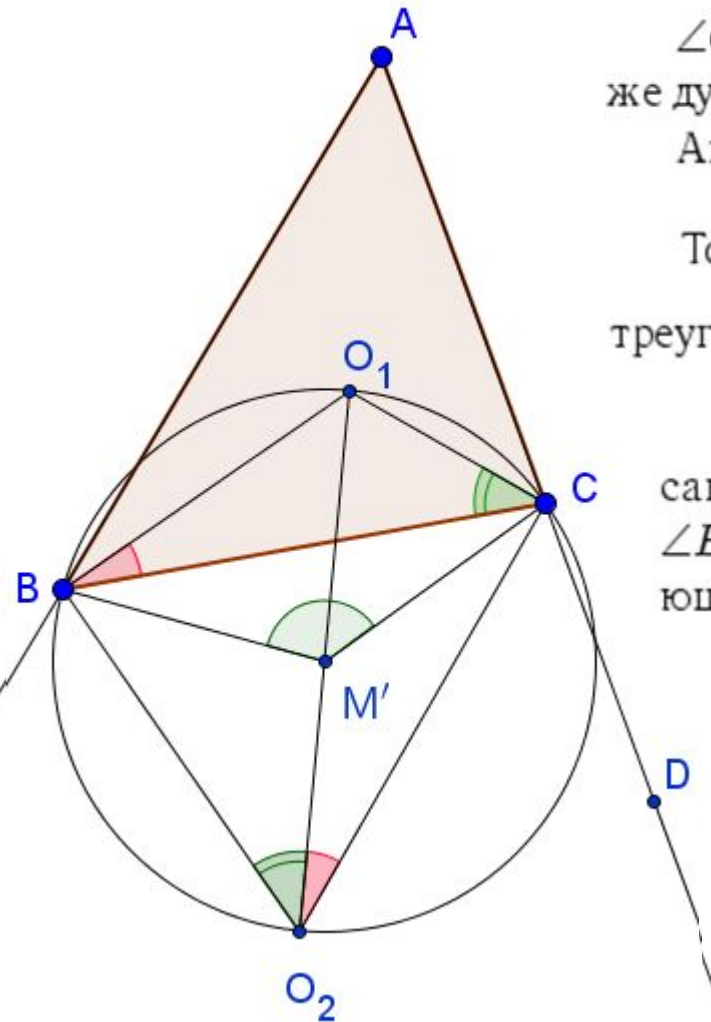
Следовательно, точки  $O_1$ ,  $C$ ,  $O_2$  и  $B$  лежат на одной окружности диаметром  $O_1O_2$ .

$\angle O_1BC = \angle O_1O_2C$  как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Аналогично,  $\angle O_1CB = \angle O_1O_2B$ .

Тогда  $\angle BO_2C = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$  (по свойству суммы углов треугольника  $ABC$ ).

Пусть  $M'$  — середина отрезка  $O_1O_2$ , то есть центр окружности, описанной вокруг  $O_1CO_2B$  ( $M'$  — середина гипотенузы  $\triangle O_1BO_2$ ). Тогда  $\angle BM'C = 2\angle BO_2C = 180^\circ - \angle A$  ( $\angle BM'C$  — центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный  $\angle BO_2C$ ).



## Решение

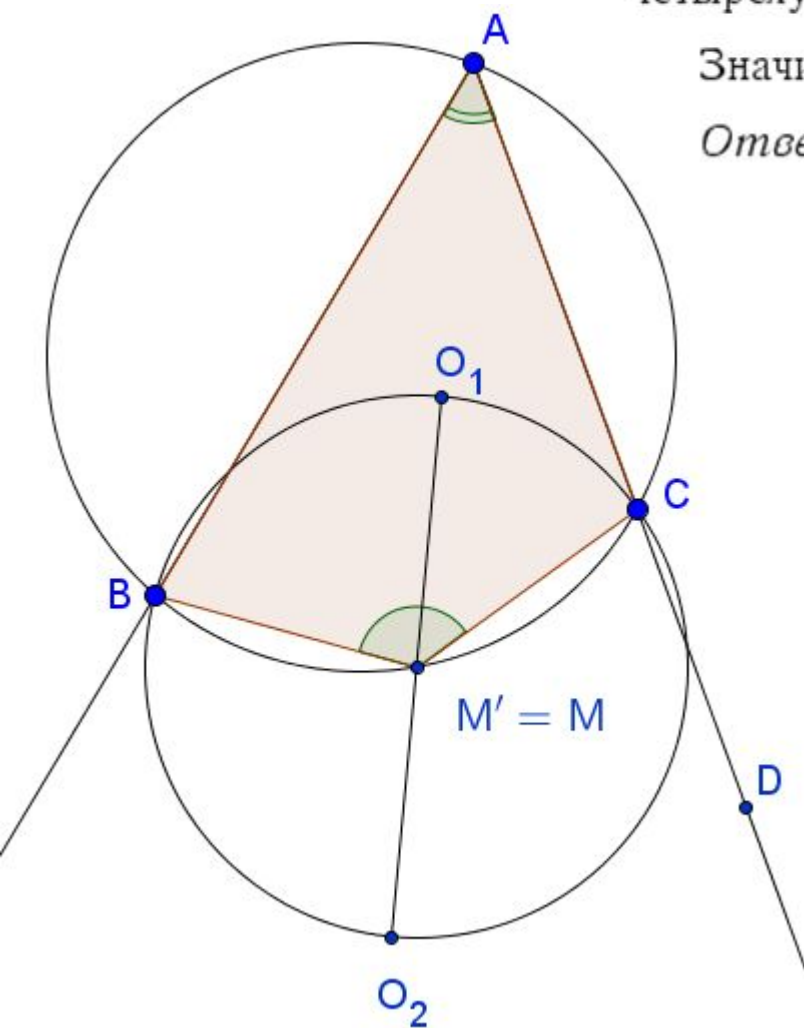
В четырёхугольнике  $ABM'C$  сумма противоположных углов  $\angle BAC + \angle BM'C = \angle A + 180^\circ - \angle A = 180^\circ$ .

Значит, точки  $A, B, C$  и  $M'$  лежат на одной окружности и это описанная окружность  $\triangle ABC$ . Следовательно, точка  $M'$  совпадает с точкой  $M$  и  $O_1M = MO_2$ .

б) Из пункта а) следует, что  $BM$  — радиус описанной окружности четырёхугольника  $O_1CO_2B$ , а  $O_1O_2$  — её диаметр.

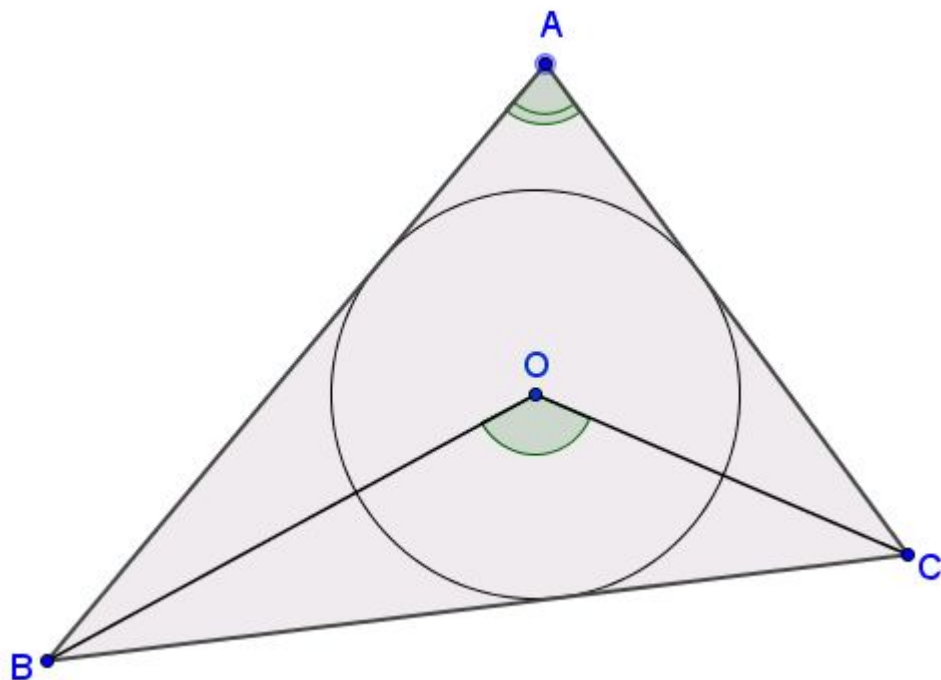
Значит,  $O_1O_2 = 2BM = 2 \cdot 5 = 10$ .

Ответ: 10.



**Теорема.** Если  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , то

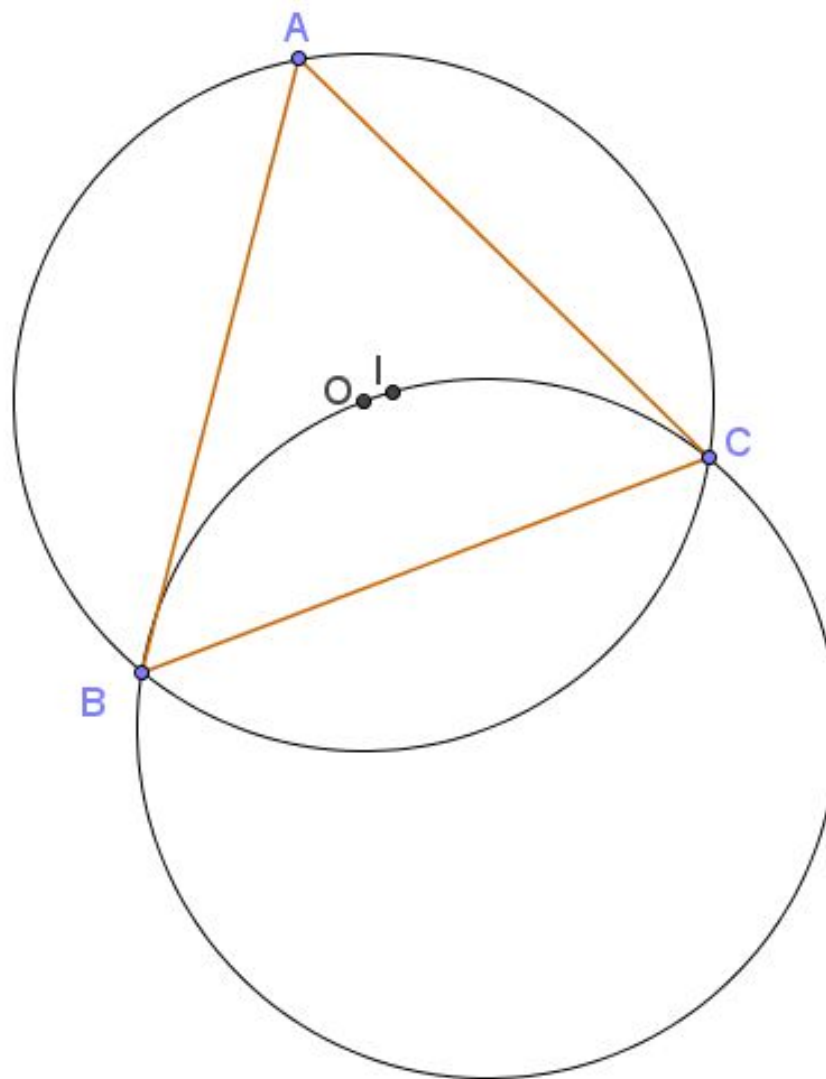
$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$$



**16** Точка  $O$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $I$  — центр вписанной в него окружности,  $H$  — точка пересечения высот. Известно, что  $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$ .

а) Докажите, что точка  $I$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $BOC$ .

б) Найдите угол  $OIH$ , если  $\angle ABC = 55^\circ$ .



## Решение

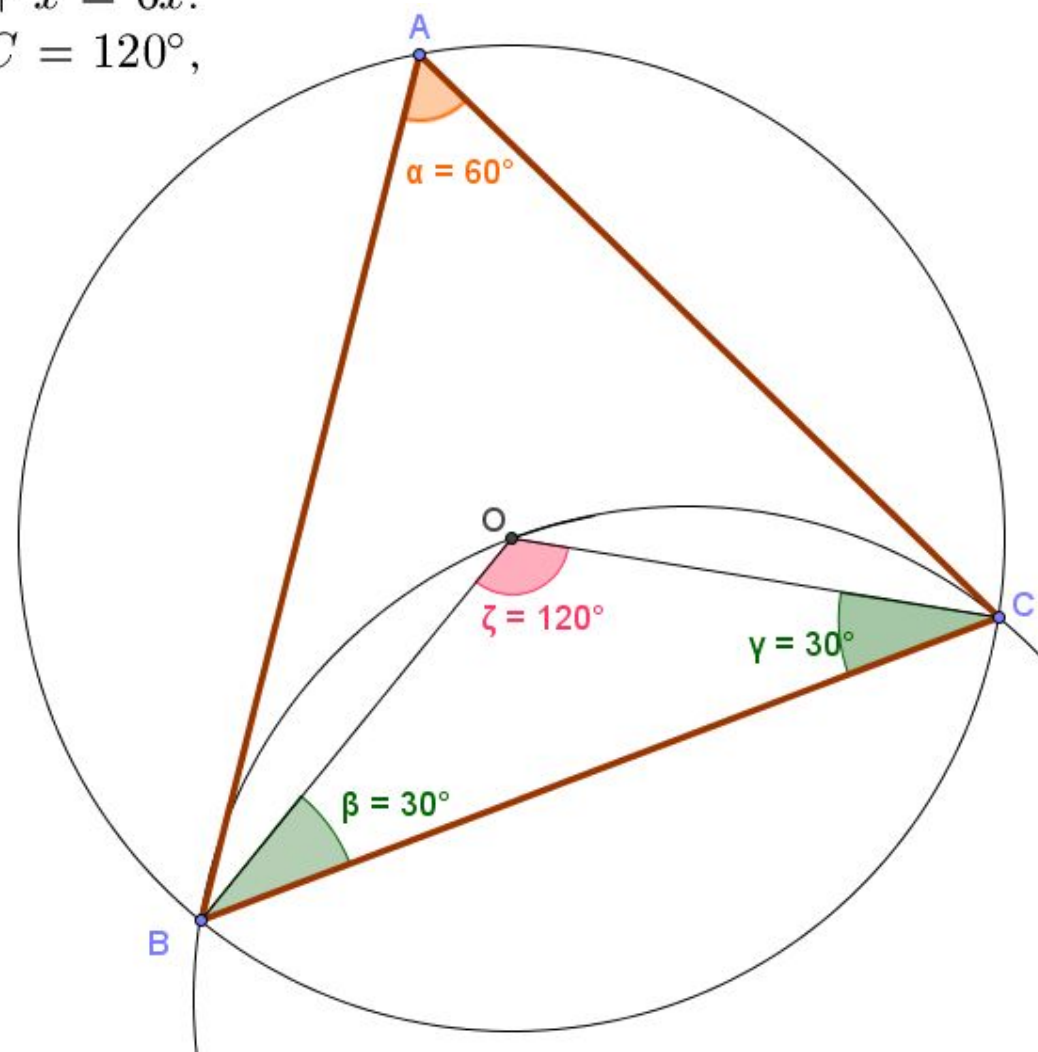
а) 1. Так как  $OB$  и  $OC$  — радиусы описанной вокруг треугольника  $ABC$  окружности, то  $OB = OC$  и  $\triangle OBC$  равнобедренный. Значит,  $\angle OBC = \angle OCB$ .

Пусть  $\angle OBC = \angle OCB = x$ .

Тогда, по условию  $\angle A = \angle OBC + \angle OCB = 2x$ ,  $\angle BOC = 2\angle A = 4x$ , так как  $\angle A$  и  $\angle BOC$  вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.

В треугольнике  $BOC$  сумма углов равна  $4x + x + x = 6x$ .

Тогда  $6x = 180^\circ$ ,  $x = 30^\circ$ . Следовательно,  $\angle BOC = 120^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$  и  $\angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$ .

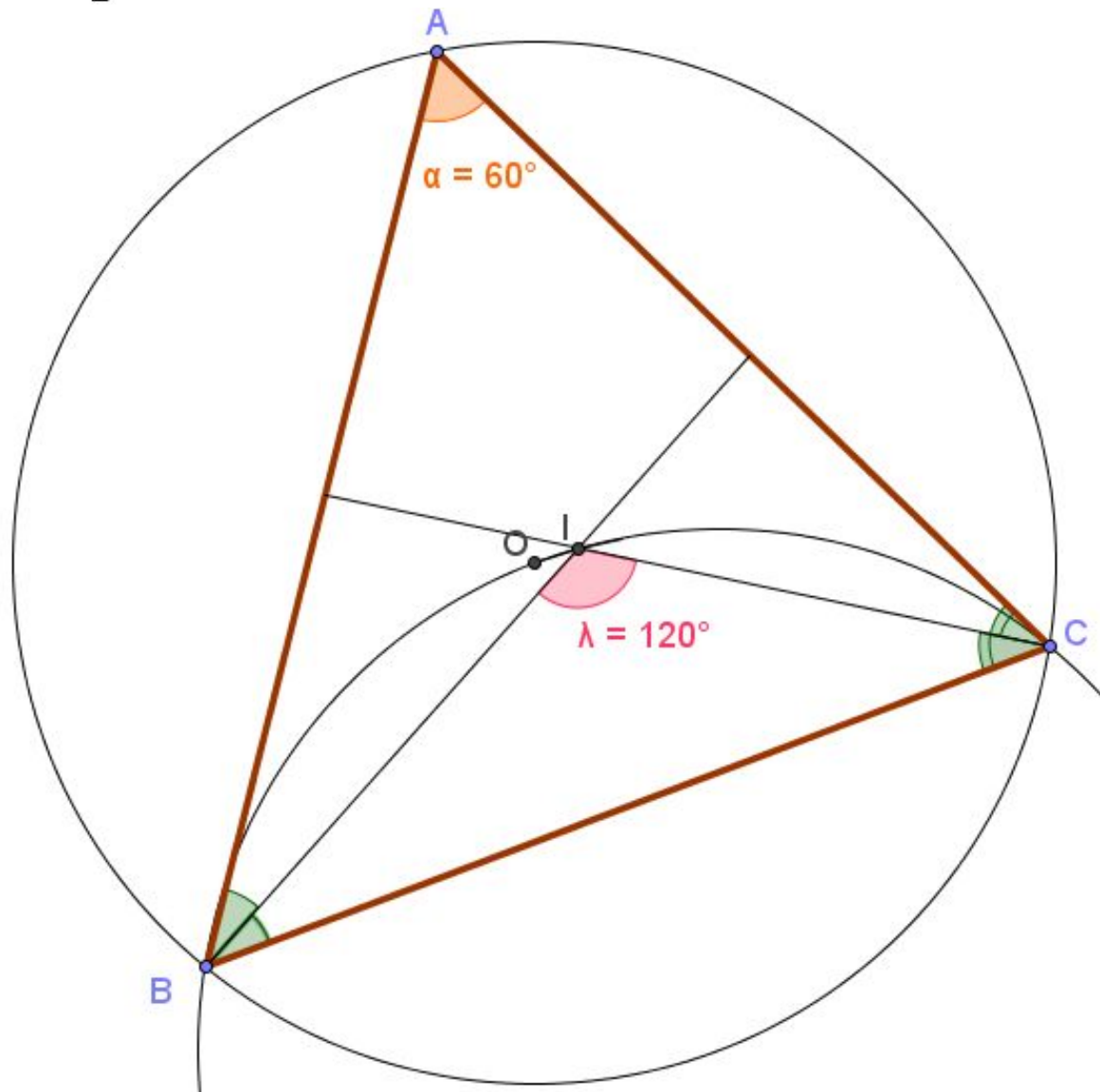




$$2. \angle BIC = 180^\circ - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) \quad (I \text{ — точка пересечения биссектрис}).$$

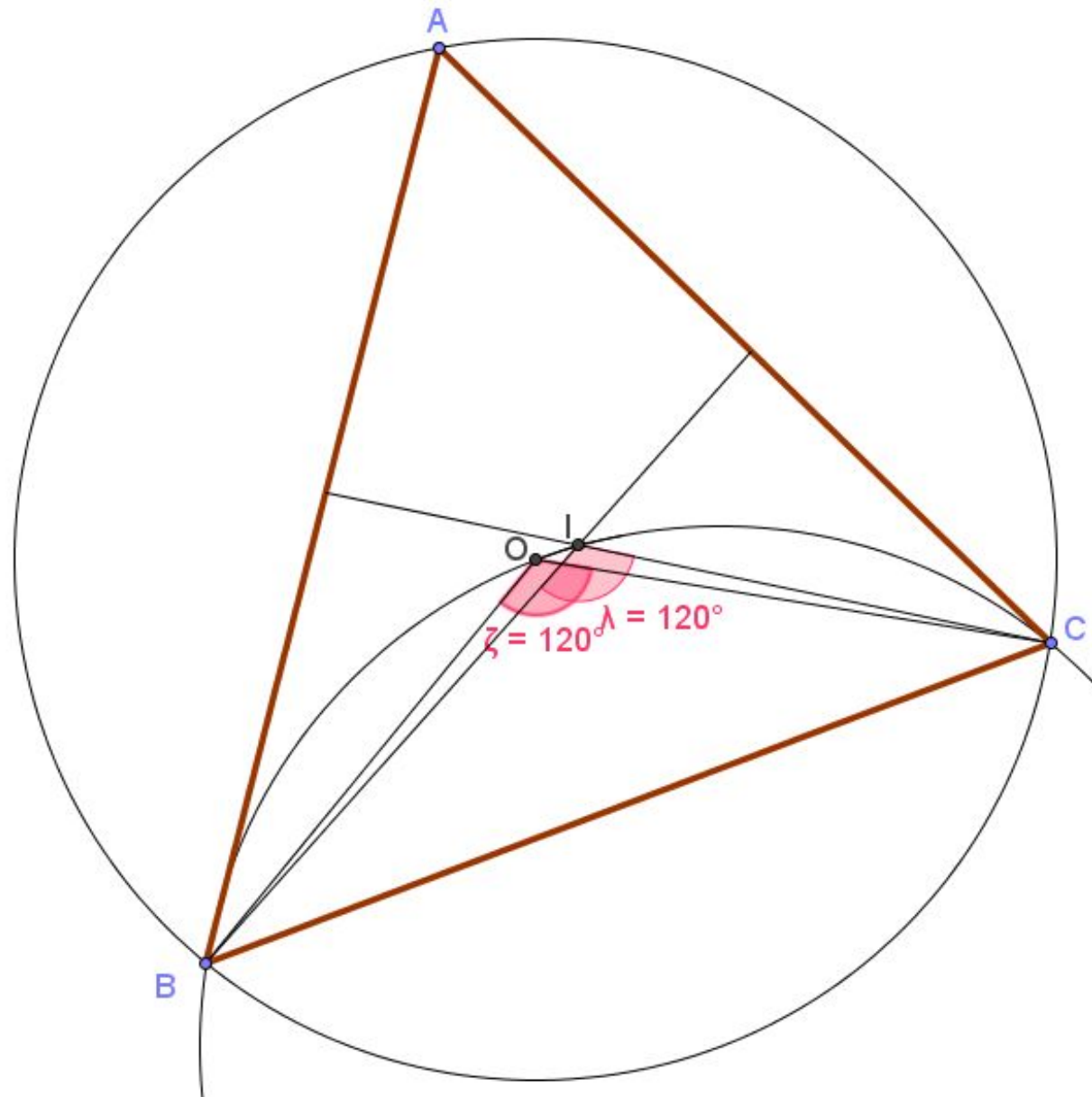
Но из треугольника  $ABC$  следует, что  $\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$ . Тогда

$$\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$



3. Так как  $\angle BOC = \angle BIC$ , то отрезок  $BC$  из точек  $O$  и  $I$  виден под одним и тем же углом.

Значит, точки  $B, C, I$  и  $O$  лежат на одной окружности — окружности, описанной около треугольника  $BOC$ .



б) 1. Так как по условию  $\angle B = 55^\circ$ , то

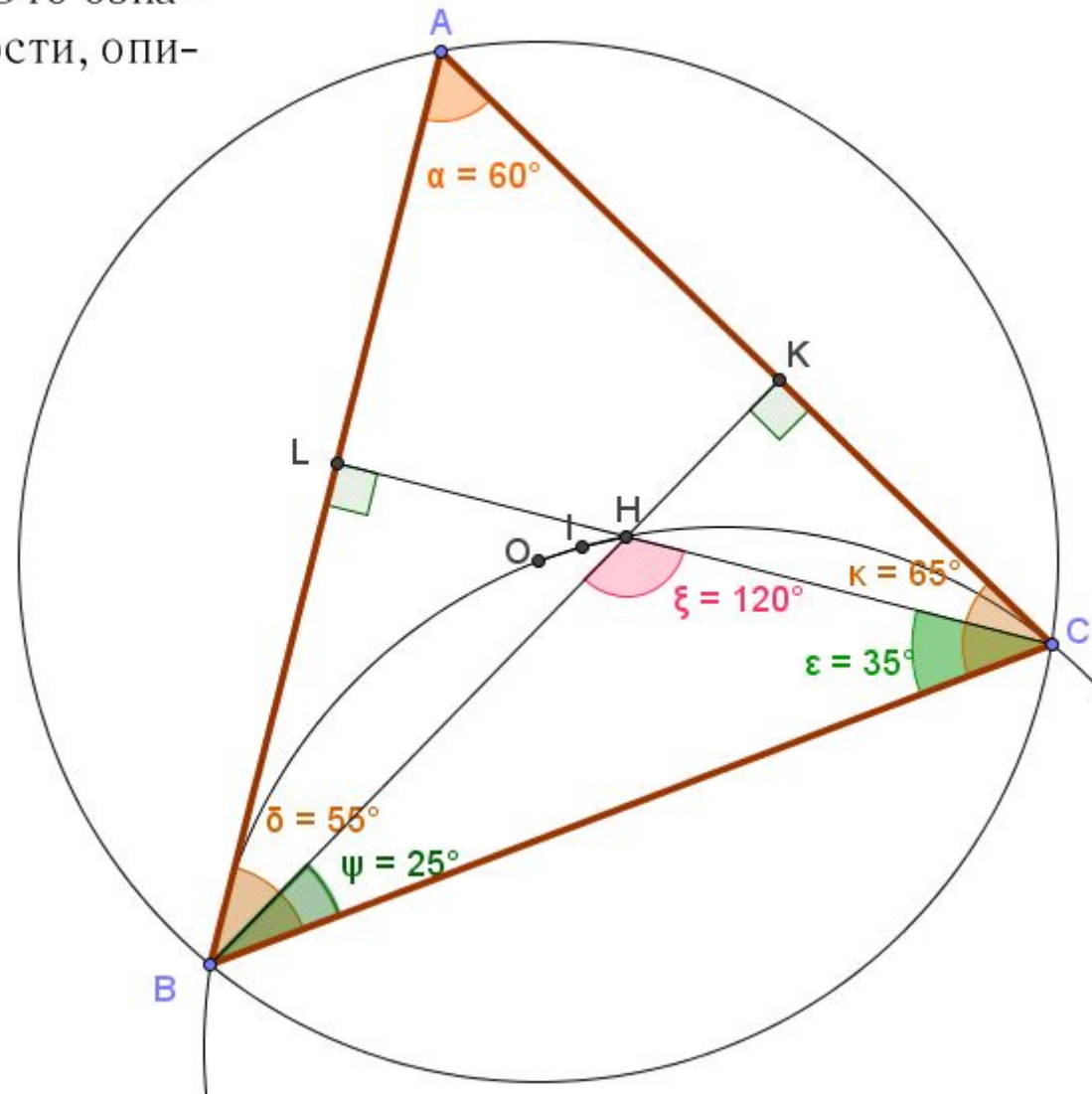
$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ = 65^\circ.$$

2. Так как треугольники  $BCL$  и  $BKC$  прямоугольные, то

$$\angle HBC = 90^\circ - \angle C = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \text{ и}$$

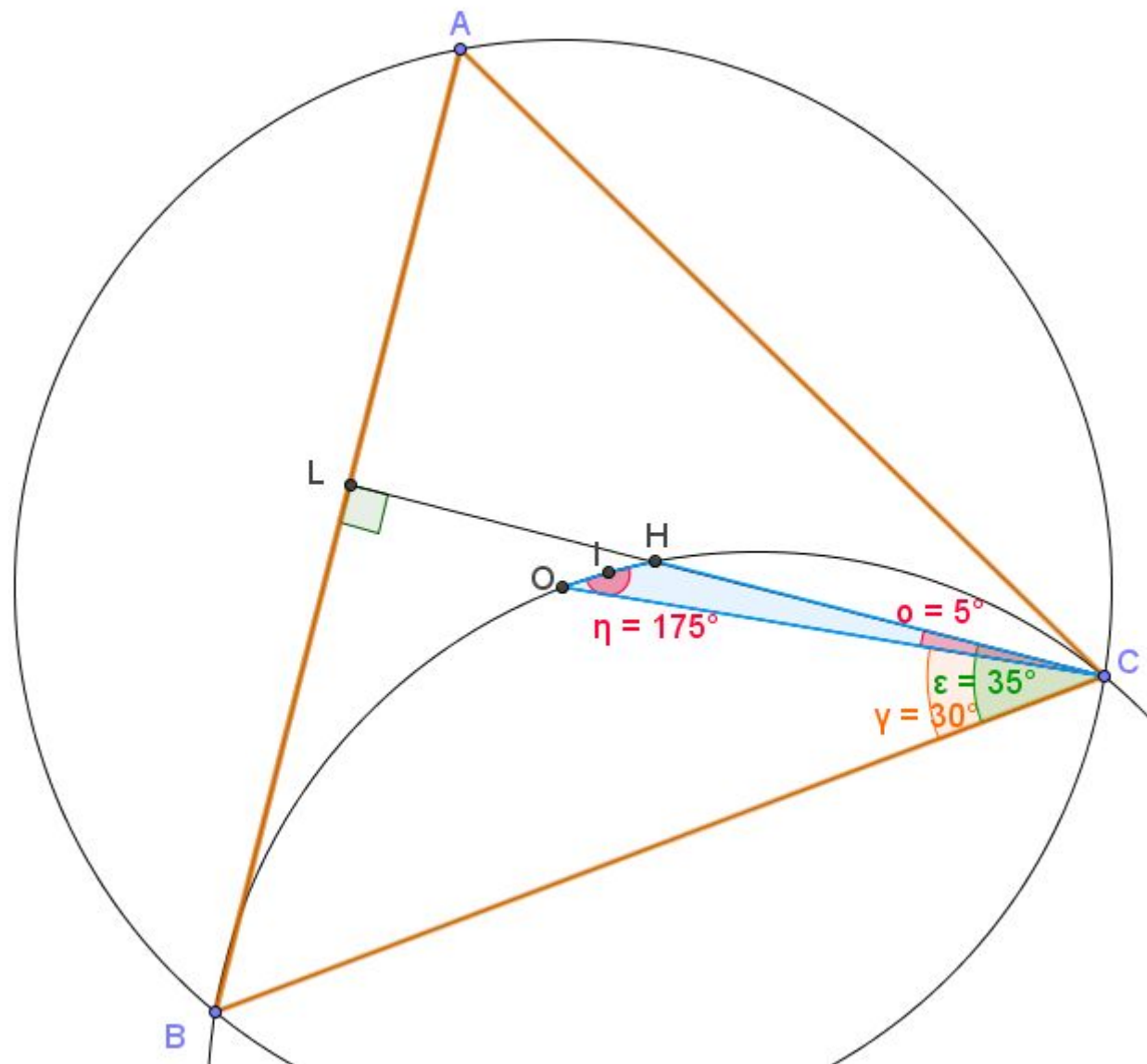
$$\angle HCB = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ.$$

Тогда  $\angle BHC = 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$ . Это означает, что точка  $H$  также лежит на окружности, описанной около треугольника  $BOC$ .




3. Четырёхугольник  $OINC$  вписан в окружность.  
 Значит,  $\angle OIN = 180^\circ - \angle OCH$ .  
 Но  $\angle OCH = \angle HCB - \angle OCB = 35^\circ - 30^\circ = 5^\circ$ .  
 Следовательно,  $\angle OIN = 180^\circ - 5^\circ = 175^\circ$ .

Ответ:  $175^\circ$ .





# Литература

 **ЕГЭ**

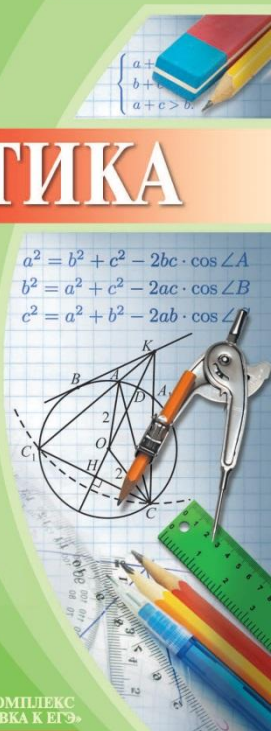
А.А. Прокофьев,  
А.Г. Корянов


**МАТЕМАТИКА**

**ПОДГОТОВКА  
к ЕГЭ**

решение  
планиметрических  
задач (С4)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$   
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle B$   
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$



 **ЛЕГИОН**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

Под редакцией  
Ф.Ф. Лысенко,  
С.Ю. Кулабухова

**ОГЭ**

**ГЕОМЕТРИЯ**



$a^2 + b^2 = c^2$      $h = c_a \cdot c_b$   
 $a^2 = c_a \cdot c$      $b^2 = c_b \cdot c$   
 $\sin \alpha = \frac{a}{c}$      $\cos \alpha = \frac{b}{c}$   
 $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

 **ЛЕГИОН**

**Задачи с развёрнутым ответом  
9 класс**

**МАСТЕР-КЛАСС**



**С.В. Ларин**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ**

в среде **GeoGebra**  
на уроках математики

 **ЛЕГИОН**





Книги можно заказать в нашем  
интернет-магазине на сайте  
[www.legionr.ru](http://www.legionr.ru)

Спрашивайте  
в книжных магазинах города!



**Издательство регулярно  
проводит вебинары для  
педагогов.**

**По завершении каждого  
вебинара участники  
получают электронные  
сертификаты.**

**Ссылки для участия вы  
сможете найти на сайте  
издательства [www.legionr.ru](http://www.legionr.ru)**



***Все вебинары издательства «Легион»  
носят обучающий характер***



**legionrus@legionrus.com**

**Вступайте в группу  
«Издательство «Легион»  
в СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ:**

** Контакт**

** Одноклассники**

** асееbook**

**Видео вебинаров смотрите на  .**

**Адрес для корреспонденции:  
344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550**