Апроксимаційні методи наближення функції однієї змінної.

Лекція 5

Частина 1

Українська інженерно-педагогічна академія

План лекції

1. Постановка задачі
2. Метод найменших квадратів
3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

1. Постановка задачі

Однією з важливих задач в інженерній практиці є задача відшукання закономірностей в явищах природи і процесах. Засобом для цього є накопичення експериментальних даних і за їх допомогою одержання деяких відомостей про закони, яким підпорядковуються ці явища або процеси.

В загальному задачу можна сформулювати так. Відомо, що між x і y існує функціональна залежність і в результаті дослідів одержана таблиця значень

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

яку можна розглядати як таблично задану функцію.

Треба за цими даними побудувати аналітичну функцію, яка хоча б наближено представляла зв'язок між x і y. Цю аналітичну функцію називають **емпіричною функцією** або емпіричною формулою.

1. Постановка задачі

Задача побудови емпіричної формули відмінна від задачі інтерполювання. Як правило, вихідні дані дуже обширні, значення x_i і y_i наближені. Тому інтерполяційна формула, яка повторює похибки вихідних даних, не говорячи про її складність, не є ідеальним розв'язком поставленої задачі. Можливо проста емпірична формула, яка згладжує похибки вихідних даних, краще відобразить дійсність.

Побудова емпіричної формули здійснюється у два етапи:

1) вияснення загального виду формули;

2) знаходження найкращих її параметрів за певним критерієм.

1. Постановка задачі

Вдалий вибір емпіричної формули значною мірою залежить від досвіду дослідника. Велике значення має геометричне зображення експериментальних даних в декартових або спеціальних координатах. Інколи бувають відомі досить загальні властивості залежності між величинами. Наприклад, величини приблизно пропорціональні, величини приблизно обернено пропорціональні, одна з величин є періодичною функцією другої з приблизно відомим періодом і т.п. Це дозволяє вибрати ту чи іншу формулу емпіричної залежності.

Яким би не був вигляд емпіричної формули, вона завжди має кілька параметрів, які треба підібрати так, щоб емпірична формула найкращим чином узгоджувалась з експериментальними даними.

Частіше всього вибираються лінійні відносно параметрів емпіричні формули або такі, які простими підстановками зводяться до лінійних відносно параметрів. В багатьох випадках обмежуються алгебраїчними або тригонометричними поліномами.

Найбільш поширеним методом знаходження параметрів емпіричної формули є метод найменших квадратів.

2. Метод найменших квадратів

Припустимо, що з деяких міркувань ми вибрали вид емпіричної формули:

$$y = f(x, a_0, a_1, ..., a_m) \qquad (1)$$

Параметри $a_0, a_1, ..., a_m$ підлягають визначенню, причому ці параметри повинні бути підібрані таким чином, щоб емпірична функція (1) найкраще наближала експериментальну залежність.

Назвемо **відхиленням** ε_i різницю між значенням функції (1) у точці x_i і експериментальним значенням у цій же точці y_i :

$$\varepsilon_i = f(x_i, a_0, a_1, ..., a_m) - y, \ i = \overline{1, n}$$

2. Метод найменших квадратів

Згідно з методом найменших квадратів найкращими значеннями параметрів $a_i,\ i=\overline{0,m}$ вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень у всіх експериментальних точках буде мінімальною, тобто

$$\Phi(a_0,a_1,\ldots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i,a_0,\ldots,a_m)-y_i\right)^2\to\min_{a_j}$$

Цю умову називають умовою найкращого середньоквадратичного наближення.

Щоб знайти значення параметрів $a_0,a_1,\ldots,a_m$, скористаємося **необхідними умовами мінімума функції** багатьох змінних. Вони полягають у рівності нулю частинних похідних першого порядку по параметрах $a_0,a_1,\ldots,a_m$ і дають систему, яка називається **нормальною системою:**

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a_0}=0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial a_1}=0,\ldots,\frac{\partial\Phi}{\partial a_m}=0$$

Якщо ця система має єдиний розв'язок, то він і дає шукані значення параметрів $a_j,\ j=\overline{1,m}$.

Розглянемо деякі окремі типи емпіричних формул, які використовуються найчастіше.

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Якщо апроксимуюча функція є поліномом степеня m, тобто емпірична формула має вигляд

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

то $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i)^2$, а нормальна система після деяких перетворень набуває вигляду

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^m. \end{cases}$$

Розв'язок системи існує і єдиний.

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Експериментальну залежність можна апроксимувати многочленом будь--якого степеня, проте вибирати степінь многочлена вище п'ятого не рекомендується, бо нормальна система погано обумовлена і при більш високих степенях похибки коефіцієнтів дуже великі.

В **частинному випадку** ($m=1$), коли емпірична формула шукається у вигляді

$$y = P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

нормальна система перетворюється на таку

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{cases}$$

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

А у разі наближення експериментальної залежності квадратичною функцією ($m=2$)

$$y = P_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

нормальною системою є система

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Середньоквадратичну похибку апроксимації функції поліномом можна обчислити за формулою:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (P_m(x_i) - y_i)^2}$$

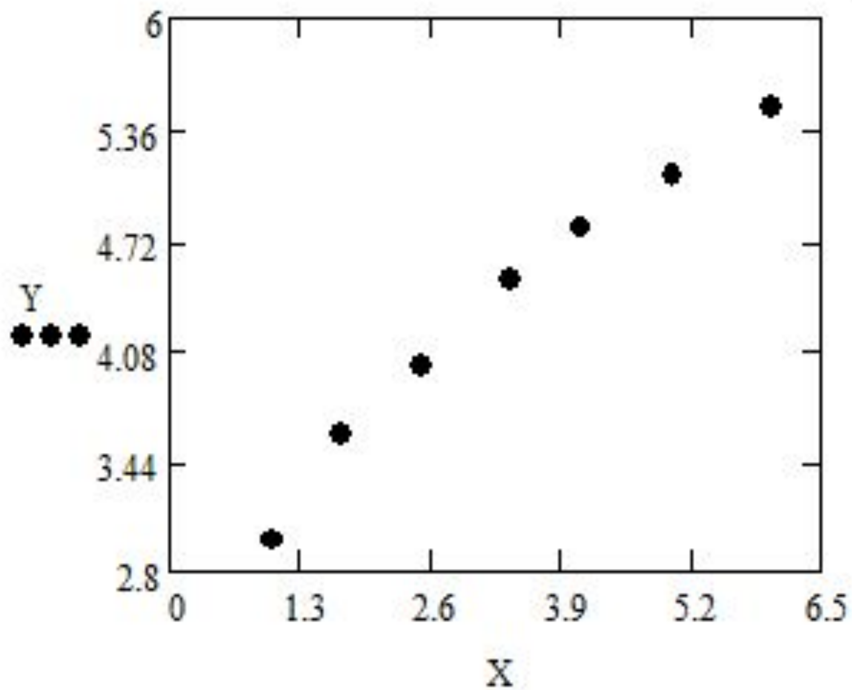
3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Приклад 2.5. Методом найменших квадратів побудувати функцію, апроксимуючу залежність, що задана таблицею

x_i	1,0	1,7	2,5	3,4	4,1	5,0	6,0
y_i	3,0	3,6	4,0	4,5	4,8	5,1	5,5

.

Розв'язування. Побудуємо точковий графік даної залежності



3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Бачимо, що він близький до прямої. Отже, апроксимуючу функцію можна шукати у вигляді $y = a_0 + a_1 x$. Параметри a_0, a_1 знаходяться як розв'язок нормальної системи .

Для складання цієї системи зробимо деякі розрахунки, які подамо у вигляді таблиці (дві останні колонки поки не заповнюємо)

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P_1(x_i)$	$(P_1(x_i) - y_i)^2$
1	1.0	3.0	1.0	3.0		
2	1.7	3.6	2.89	6.12		
3	2.5	4.0	6.25	10.0		
4	3.4	4.5	11.56	15.3		
5	4.1	4.8	16.81	19.68		
6	5.0	5.1	25.0	25.5		
7	6.0	5.5	36.0	33.0		
$\sum$	23.7	30.5	99.51	112.6		

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Нормальна система має вигляд

$$\begin{cases} na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7a_0 + 23,7a_1 = 30,5, \\ 23,7a_0 + 99,51a_1 = 112,6. \end{cases}$$

її роз'язком є $a_0 \approx 2,716748$, $a_1 \approx 0,4845047$.

Отже, апроксимуюча функція

$$y = P_1(x) = 2,7167 + 0,4845x.$$

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

Обчислимо середньоквадратичну похибку апроксимації за формулою:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(P_1(x_i) - y_i)^2}.$$

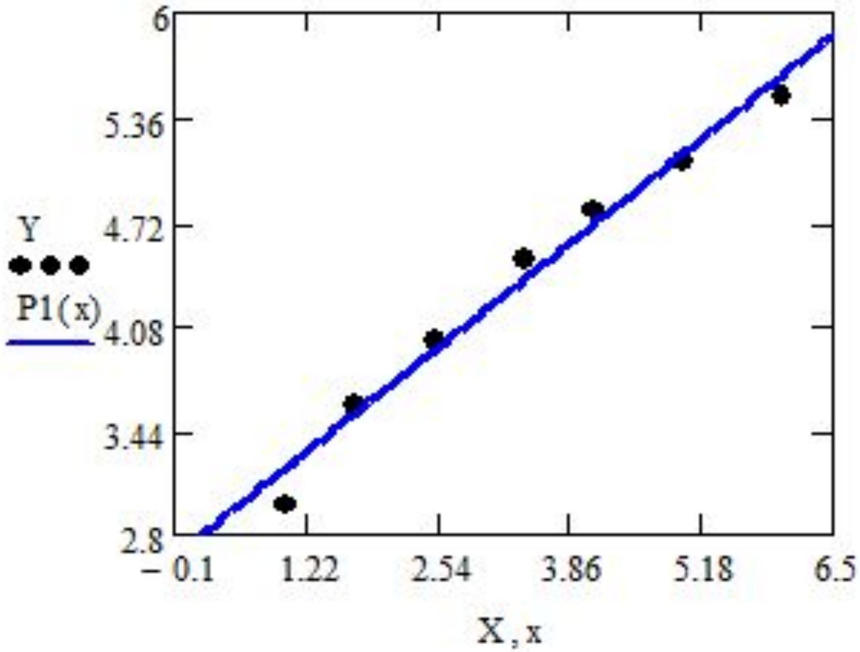
Для цього заповнимо дві останні колонки таблиці і одержимо

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P_1(x_i)$	$(P_1(x_i) - y_i)^2$
1	1.0	3.0	1.0	3.0	3.2012	0.0405
2	1.7	3.6	2.89	6.12	3.54035	0.0036
3	2.5	4.0	6.25	10.0	3.92795	0.0052
4	3.4	4.5	11.56	15.3	4.364	0.0185
5	4.1	4.8	16.81	19.68	4.70315	0.0094
6	5.0	5.1	25.0	25.5	5.1392	0.0015
7	6.0	5.5	36.0	33.0	5.6237	0.0153
$\sum$	23.7	30.5	99.51	112.6		0.094

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{7}\cdot 0{,}094} \approx 0{,}1158 \approx 0{,}1.$$

3. Апроксимація функцій однієї змінної поліномом

За даними другої та предостанньої колонок таблиці побудуємо графік функції $y = P_1(x)$ в тій же системі координат, що і перший графік, який побудовано за експериментальними точками.



Таким чином, знайдено емпіричну формулу у вигляді полінома першого степеня $y = P_1(x) = 2,7167 + 0,4845x$, середньоквадратична похибка якої $\sigma_1 \approx 0,1$.