Экономические задачи

Задача № 1

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение

Пусть фермер взял сумму S под p % годовых

Через год он должен был банку сумму $S\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Вернул в банк три четверти долга $\frac{3}{4}S\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

И остался должен $\frac{1}{4}S\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Еще через год фермер стал должен

$$\frac{1}{4}S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,$$

Внес в банк сумму 1,21S

Рассчитался с банком полностью

$$\frac{1}{4}S\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1{,}21S \Leftrightarrow \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 4{,}84 \underset{p>0}{\Leftrightarrow} 1+\frac{p}{100} = 2{,}2 \Leftrightarrow p = 120.$$

Тем самым, банк выдал фермеру кредит под 120% годовых (это ограбление).

Задача № 2

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к

Решение

Общая сумма, причитающаяся вкладчику, включая дополнительные вклады в течении четырех лет и все процентные начисления, к концу пятого года хранения денег составляет 825(100+725) процентов от первоначального (3900 тыс. руб.). Эта сумма равна:

$$3900 \cdot 8,25 = 39 \cdot 825 = 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13$$

Поскольку процентная надбавка начислялась в размере 50 % годовых, то за 5 лет хранения этой части вклада вложенная сумма увеличилась в

$$1,5^5 = \frac{3^5}{2^5}$$

То есть стала:

$$\frac{3900 \cdot 3^5}{2^5} = \frac{3 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^5}{2^5} = \frac{3^6 \cdot 5^2 \cdot 13}{2^3}$$

Теперь найдем часть образованную дополнительными вкладами, а также процентными начислениями на эту сумму

$$3^2\cdot5^2\cdot11\cdot13-\frac{3^6\cdot5^2\cdot13}{2^3}=\frac{2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot11\cdot13-3^6\cdot5^2\cdot13}{2^3}=\frac{3^2\cdot5^2\cdot13\cdot(2^3\cdot11-3^4)}{2^3}=$$

$$=\frac{3^2\cdot5^2\cdot13\cdot(88-81)}{2^3}=\frac{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot13}{2^3}$$

Это - с одной стороны. С другой стороны эта сумма образовалась так:

Пусть вкладчик в конце года и еще три раза в следующие годы вносил дополнительный вклад в сумме x тыс.руб.

Начало года, тыс. руб.	Конец года, тыс. руб.
x	3/2 x
3/2 x + x = 5/2 x	5/2x * 3/2= 15/4 x
15/4 x + x = 19/4 x	19/4 x * 3/2= 57/8 x
57/8 x + x = 65/8 x	65/8 x * 3/2 = 195/16 x = ((3 * 5* 13) / 2^4) x

Теперь решим уравнение:

$$\frac{3\cdot5\cdot13}{2^4}\cdot x=\frac{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot13}{2^3}\Leftrightarrow x=\frac{3^2\cdot5^2\cdot7\cdot13\cdot2^4}{2^3\cdot3\cdot5\cdot13}\Leftrightarrow x=3\cdot5\cdot7\cdot2\Leftrightarrow x=210.$$

Итак, искомая сумма равна 210 тыс. руб.

Задача № 3

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30 % больше суммы, взятой в кредит.

Решение

Пусть сумма кредита равна S

По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{18S}{19},\ \ldots,\ \frac{2S}{19},\ \frac{S}{19},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r %.

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$,

Тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{18kS}{19},\ \ldots,\ \frac{2kS}{19},\ \frac{kS}{19}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{19},\ \frac{18(k-1)S+S}{19},\ \dots,\ \frac{2(k-1)S+S}{19},\ \frac{(k-1)S+S}{19}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{18}{19}+\dots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=S(1+10(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 30 % больше суммы, взятой в кредит, поэтому:

$$10(k-1)=0{,}3\Leftrightarrow k=1{,}03\Leftrightarrow r=3.$$

Задача № 4

31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплат следующая:

31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), зачем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатит на 3 равных платежа.

На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг на 2 равных платежа?

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a%.

Коэффициент составит $b = 1 + 0{,}01a$.

После первой половины выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$.

После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасит кредит полностью, поэтому

$$Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0,$$

откуда $$X = \frac{Sb^3(b-1)}{(b^3-1)}.$$

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать

$$Y = \frac{Sb^2}{b+1}$$

Значит, он отдал банку на 3X – 2Y больше

При S = 7007000 и b = 1,2

$$X = \frac{7007000 \cdot 1,728 \cdot 0,2}{0,728} = 3326400$$

$$Y = \frac{7007000 \cdot 1,44}{2,2} = 4586400$$

Значит 2X- 3Y = 806400

Задача № 5

Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн. рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых.

На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

Решение

Чем больше годовые выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 330 тыс. рублей.

Год	Долг до выплаты, тыс. руб.	Долг после выплаты, тыс. руб.
1	1540	1210
2	1331	1001
3	1101,1	771,1
4	848,21	518,21
5	570,03	240,03
6	264,03	0

Задача № 6

31 декабря 2013 года Сергей взял в банке кредит 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа.

Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение

Пусть сумма кредита равна а, ежегодный платеж равен х рублей, а годовые составляют k %.

Коэффициент составит $m = 1 + 0{,}01k$

После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$

После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3-1}{m-1}\cdot x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{am^3(m-1)}{m^3-1}.$$

При a = 9 930 000 и k = 10, получаем m = 1,1

$$x = \frac{9930000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Задача № 7

31 декабря 2014 года Петр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на а %), затем Пётр переводит очередной транш.

Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года.

Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял кредит?

Решение

Пусть S – сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи A_1 и A_2 соответственно

Сумма долга каждый год увеличивается на a %, то есть умножается на коэффициент b = 1 + 0,01 * a

После первой выплаты сумма долга станет равна

$$S_1 = Sb - A_1,$$

После второй выплаты $S_2 = (Sb - A_1)b - A_1,$

После третьей выплаты $S_3 = ((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1,$

После четвертой выплаты

$$S_4 = (((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1.$$

Причем, долг будет погашен полностью

$$(((Sb - A_1)b - A_1)b - A_1)b - A_1 = 0.$$

Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются размером A_2

$$S_2' = (Sb - A_2)b - A_2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} Sb^4 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 - A_2b - A_2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2 \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0, \\ Sb^2 = A_2b + A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для Sb^2 в первое уравнение

$$(A_2 + A_2b) \cdot b^2 - A_1b^3 - A_1b^2 - A_1b - A_1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение

$$(A_2-A_1)b^3+(A_2-A_1)b^2-A_1b-A_1=0 \Leftrightarrow b^2(A_2-A_1)(b+1)-A_1(b+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)((A_2-A_1)b^2-A_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b^2=\dfrac{A_1}{A_2-A_1}. \end{array}\right.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b=-1{,}2, \\ b=1{,}2. \end{array}\right.$$

Отрицательные корни не подходят по условию задачи, значит, b = 1,2, откуда a = 20, то есть Пётр взял деньги в банке по 20 % .

Молодцы
!