Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»

Элементы теории графов

Автор Макарова О.Л.

Ижевск
2013

Вопросы

- История возникновения
- Терминология
- Виды графов
- Изоморфизм
- Машинное представление графов
- Связность
- Деревья
- Планарность
- Раскраска графа

История возникновения

Теория графов –	англ. theory graph
	нем. Graphentheorie
	греч. γραφω - пишу

Теория графов:

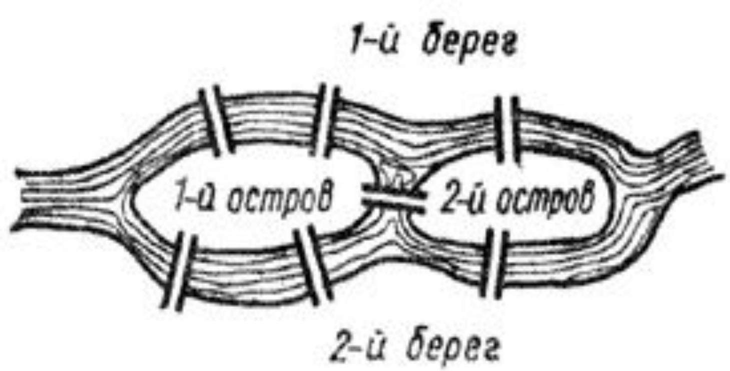
- одна из ветвей дискретной топологии;
- теория сетей;
- наука о топологических формах, сетевых моделях представления любого процесса или системы;

- *совокупность способов топологических представлений каких-либо процессов или структур.*

История возникновения

Родоначальник теории графов - *Леонард Эйлер*.
В 1736 году в одном из своих писем он формулирует и предлагает решение задачи о семи кёнигсбергских мостах, ставшей впоследствии классикой среди задач теории графов.

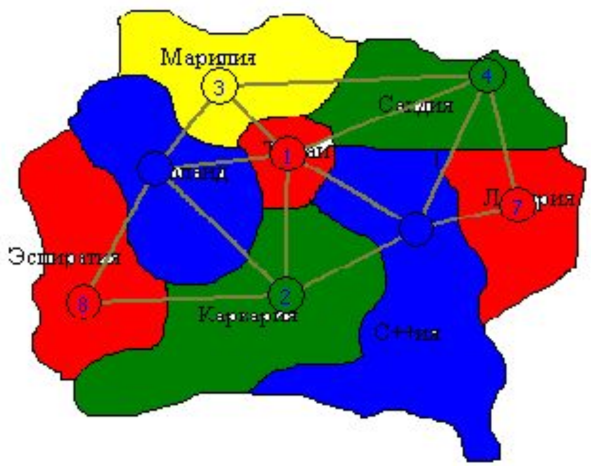
✔**Задача:** На рисунке представлен схематический план центральной части города Кенигсберг, включающий два берега реки Перголя, два острова в ней и семь соединяющих их мостов. Задача состоит в том, чтобы найти маршрут, проходящий по суши по одному разу. При этом через каждый из мостов можно проходить только по одному разу, а конец и начало пути должны совпадать.



История возникновения

✔**Задача:** В середине XIX века в одной из британских картографических типографий резонно возник вопрос: «Сколько красок достаточно для правильного раскрашивания всех графств на карте Англии»(любые две области, имеющие общий участок границы, должны быть раскрашены в разные цвета)?

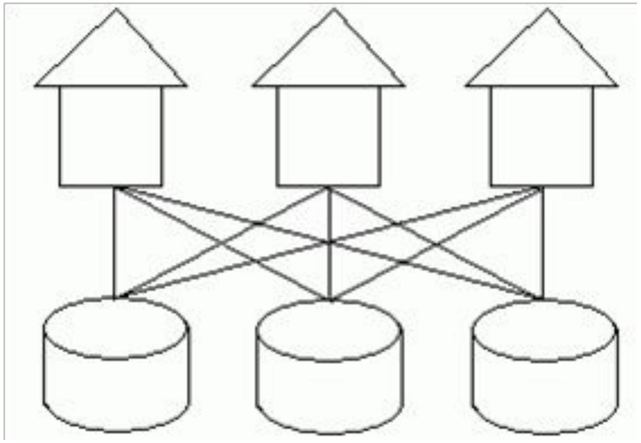
Для представления карты в виде графа, страны будут являться вершинами графа, а границы дуга



В 1976 году Аппель и Хейкен опубликовали решение этой задачи, которое базировалось на переборе вариантов с помощью компьютера.

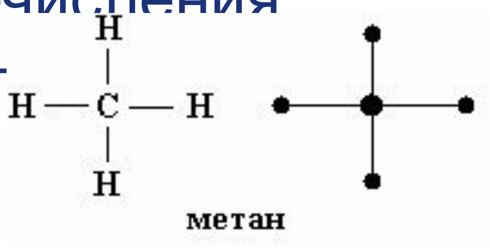
✔**Задача:** Имеется три дома и три колодца, каким-то образом расположенные на плоскости. Провести от каждого дома к каждому колодцу тропинку так, чтобы тропинки не пересекались.

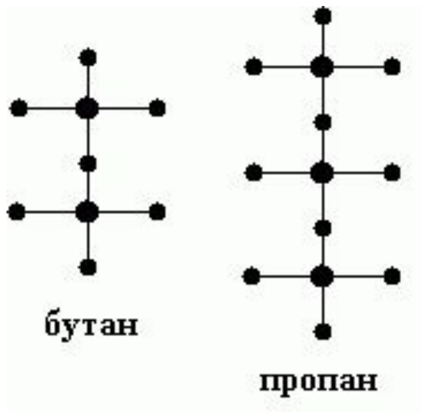
Эта задача была решена (показано, что решения не существует) Куратовским в 1930 году.



История возникновения

- В 1847 году Кирхгоф разработал *теорию деревьев* для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- Это позволило ему найти ток в каждом проводнике в каждом контуре.
- От цепей он перешел к графам. Кирхгоф показал, что не надо рассматривать весь граф, можно рассматривать простые циклы графа, которые образуются остовным графом.
- В 1957 году ученый Келли разработал теорию перечисления деревьев в попытке найт изомер углеводорода.





Применения теории графов

- ***Химия*** (для описания структур, путей сложных реакций, правило фаз также может быть интерпретировано как задача теории графов);
- ***Компьютерная химия*** — сравнительно молодая область химии, основанная на применении теории графов;
- ***Информатика и программирование*** (граф-схема алгоритма);
- ***Коммуникационные и транспортные системы*** (маршрутизация данных в Интернете и т.п.).
- ***Схемотехника*** (топология межсоединений элементов на печатной плате или микросхеме представляет собой граф или гиперграф).
- ***И т.д.***

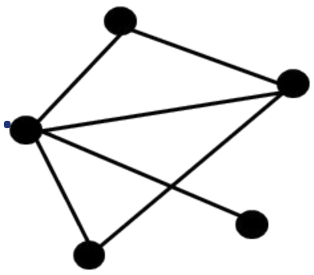
Терминология

- *Графом G(V, E)* называется структура, построенная на непустом множестве V (множество вершин) с заданным на нем отношением E (множество ребер).

Обозначение: $G(V, E) = \langle V; E \rangle,\ V \neq \varnothing,\ |V| < \infty$

$$E = \{ e = (a, b) \mid a, b \in V \text{ и } aEb \} \subset V \times V = V^2$$

- Граф называется *неориентированным*, если отношение E является симметричным.



- Граф называется *ориентированным*, если отношение E не является симметричным.

Терминология

Обозначения:

$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, $|V| = n$ – множество вершин

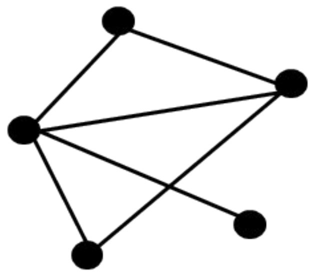
$E = \{ e_1, e_2, \ldots, e_n \}$, $|E| = p$ – множество ребер

- *Порядок* графа - это число вершин в графе $|V|$,

$$n = n(G) = |V|$$

- *Размер* графа - это число его рёбер $|E|$,

$$p = p(G) = |E|$$

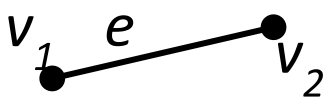


Говорят: (n, p)-граф $(5, 6)$-граф

Терминология

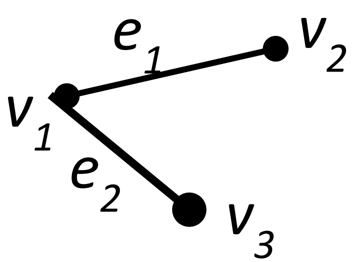
$G(V, E) = \langle V; E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = p$

- *Концевые* вершины - это вершины v_1 и v_2, соединяющие ребро графа $e = (v_1, v_2)$.



- Вершина v_1 и ребро e *инцидентны*.
- Ребро e и вершина v_2 также *инцидентны*.

- Две концевые вершины одного и того же ребра называются *смежными*.



- Два ребра e_1 и e_2 называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину v_1.

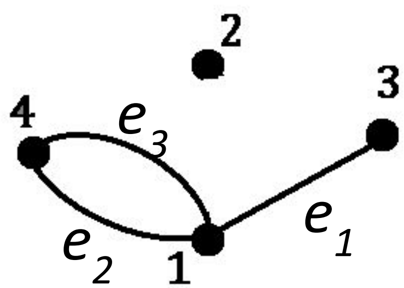
- Ребро вида $e = (v, v)$ называется *петлей*.

Терминология

- Два ребра называются *кратными*, если их обе концевые вершины общие.
- *Степенью* вершины v называют количество инцидентных ей рёбер.

    Обозначение: $\rho(v)$

- Вершина называется *изолированной*, если она не является концом ни для одного ребра, т.е. $\rho(v) = 0$.
- Вершина называется *висячей* (листом), если она является концом ровно одного ребра, т.е. $\rho(v) = 1$.



Вершина 2 – *изолированная;*
Вершина 3 – *висячая;*
Ребра e_2 и e_3 - *кратные.*

Терминология

•Множество вершин, смежных с вершиной v, называется **множеством смежности** вершины v.

Обозначение: $\Gamma^{+}(v) : \Gamma^{+}(v) = \{ u \in V \mid (u, v) \in E \}$,

$$\Gamma^{*}(v) = \Gamma^{+}(v) + \{ v \}.$$

Если не оговорено противное, то подразумевается Γ^{+} и обозначается просто Γ.

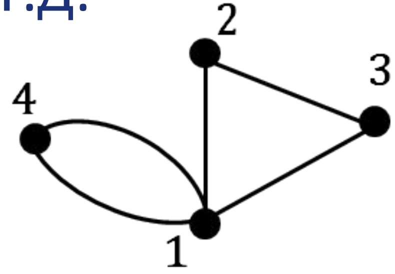
•Очевидно, что $u \in \Gamma(v) \Leftrightarrow v \in \Gamma(u)$.

•Если $A \subset V$ (A - некоторое подмножество вершин графа), то $\Gamma(A)$ - множество всех вершин, смежных с вершинами из множества A: $\Gamma(A) = \{ u \in V \mid \exists v \in A$ и $u \in \Gamma(v) \} = \Gamma(v)$.

Терминология

<u>Пример:</u> Граф представляют диаграммой

Множество вершин: $V = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, $|V| = 4$
Множество ребер: $E = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 4), (2, 3) \}$, $|E| = 5$
Смежные вершины: *1* и *2*, *2* и *3*, *1* и *4*, и т.д.
Смежные ребра: (*1, 2*) и (*1, 3*), (*1, 3*) и (*2, 3*), и т.д.
Несмежные ребра: (*1, 4*) и (*2, 3*).



Множества смежности вершины *2*:

$\Gamma^{+}(2) = \{ 1, 3 \}$

$\Gamma^{*}(2) = \{ 1, 2, 3 \}$

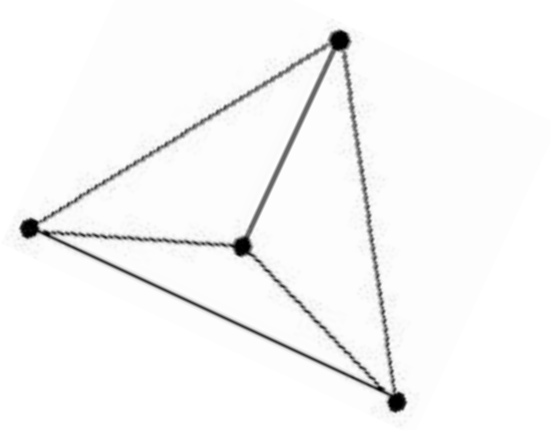
Множество смежности множества вершин $A = \{ 2, 3 \}$:

$\Gamma(A) = \{1, 2, 3\}$

Терминология

- Обозначим:
  минимальная степень вершины графа G – $\delta(G)$
  максимальная степень вершины графа G – $\Delta(G)$
  $\delta(G(V, E)) = \min \rho(v)$, $\Delta(G(V, E)) = \max \rho(v)$.
- Если степени всех вершин графа равны k, то граф называется *регулярным* степени r: $\delta(G) = \Delta(G) = r$.

Степень регулярности – *инвариант* графа
Обозначение: $r(G)$



$r(G) = 3$

Для нерегулярных графов *$r(G)$ не определено.*

Терминология

- **Теорема**(Эйлера). Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер: $\Sigma\, \rho(v) = 2p$.

<u>*Доказательство:*</u>

При подсчете суммы степеней вершин каждое ребро учитывается два раза: для одного конца ребра и для другого.

- **Следствие1.** Число вершин нечетной степени четно.

<u>*Доказательство:*</u>

По теореме Эйлера сумма степеней всех вершин - четное число. Сумма степеней вершин четной степени четна, значит, сумма степеней вершин нечетной степени также четна, следовательно, их четной число.

- **Следствие2.** Сумма полустепеней узлов орграфа равна удвоенному количеству дуг: $\Sigma\, d^{+}(v) + \Sigma\, d^{-}(v) = 2q$.

<u>*Доказательство:*</u>

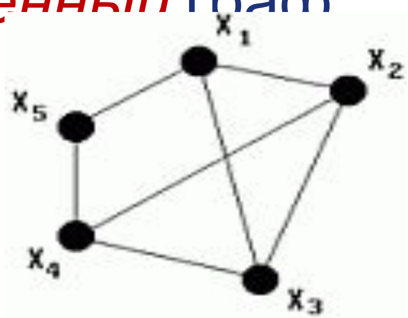
Сумма полустепеней узлов орграфа равна сумме степеней вершин графа, полученного из орграфа забыванием ориентации дуг.

Виды графов

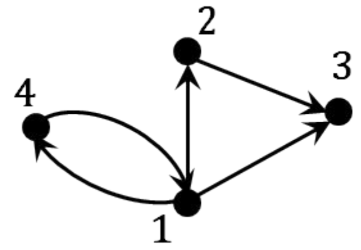
- Если задана функция $f : V \to M$ и/или $f : E \to M$, то множество M называется множеством *меток*, а граф, называется *помеченным* (*нагруженным*).

Множество меток: используются *буквы* или *целые числа*.

- Если функция f инъективна, а метки – целые числа, то граф называют *нумерованным*.
- Если у графа помечены ребра - это *реберно-помеченный* граф



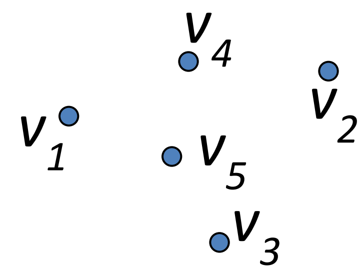
Помеченный граф



Нумерованный граф

Виды графов

- *Тривиальный* граф - граф, состоящий из *одной* вершины.
- *Нуль–граф* — это граф, состоящий только из изолированных вершин, т.е. $|E| = 0$.



Обозначение: G_0.

- Пустой граф — это граф, не содержащий ни вершин, ни рёбер, т.е. $|V| = 0$, $|E| = 0$.

Обозначение: $G_{\varnothing}$.

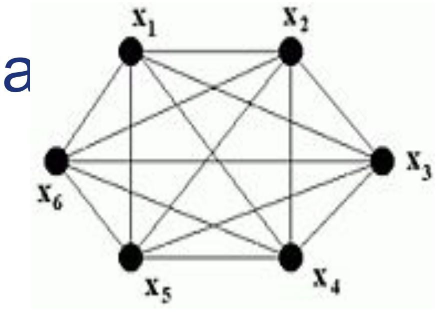
- Неориентированный граф называется *простым*, если у него нет петель и кратных ребер.

- Говоря *граф* часто *подразумевают* *простой граф*.

Виды графов

- Граф с петлями называется *псевдографом*.
- *Мультиграфом* называется граф с *кратными ребрами*.
- Неориентированный граф, в котором каждая пара вершин смежна, называется *полным*.

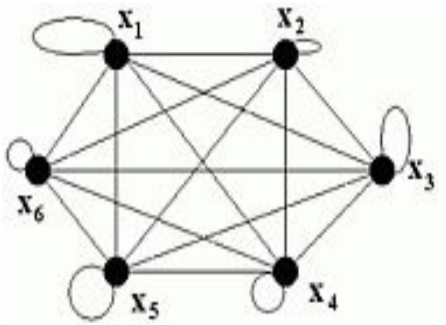
Обозначение: K_n



❑ **Теорема:** Число ребер полного графа с n вершинами равно: $p(K_n) = n\,(n - 1) / 2$.

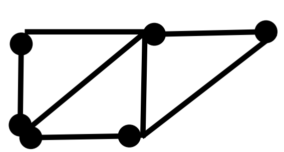
- Полный граф, в котором каждая вершина имеет петлю, называется *плотным*.

Обозначение: K'_n

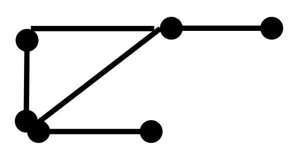


Подграфы

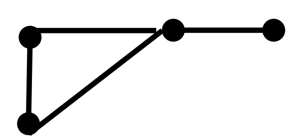
- *Подграфом* графа $G(V, E)$ называется граф $G'(V', E')$, если $V' \subset V$, $E' \subset E$.
  Обозначение: $G' \subset G$
- Подграф $G'(V', E')$ называется *остовным* подграфом графа $G(V, E)$, если $V' = V$.
- Граф $G'(V', E')$ называется *собственным* подграфом графа G, если $V' \subset V$, $E' \subset E$ и $V' \neq V$ и $E' \neq E$.
- Подграф $G'(V', E')$ называется *правильным* подграфом графа $G(V, E)$, если G' содержит все ребра G, определенные на множестве вершин V'.



Граф G



Остовный подграф G'



Собственный правильный подграф G''

Изоморфизм графов

- Говорят, что два графа $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ изоморфны (обозначается $G_1 \sim G_2$), если существует биекция $h: V_1 \to V_2$, сохраняющая смежность, т.е.

$$e_1 = (u, v) \in E_1 \Leftrightarrow e_2 = (h(u), h(v)) \in E_2$$

- **Теорема:** Изоморфизм графов есть отношение эквивалентности.

Доказательство:

Действительно:

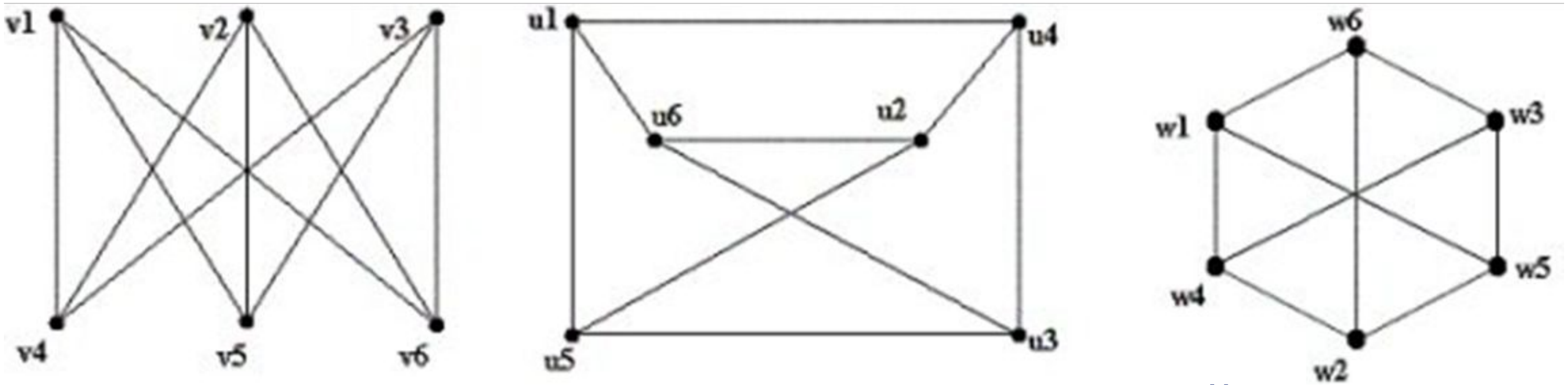
[Рефлексивность.] $G \sim G$, биекция суть тождественная функция;

[Симметричность.] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h, то $G_2 \sim G_1$ с биекцией h^{-1};

[Транзитивность.] если $G_1 \sim G_2$ с биекцией h и $G_2 \sim G_3$ с биекцией g, то $G_1 \sim G_3$ с биекцией $g \circ h$.

Изоморфизм графов

Пример: С виду различные диаграммы являются диаграммами одного и того же графа $K_{3,3}$.



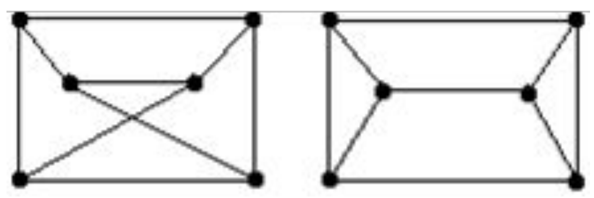
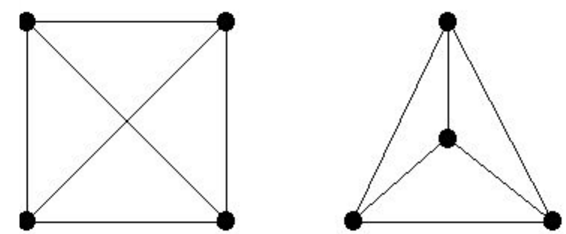
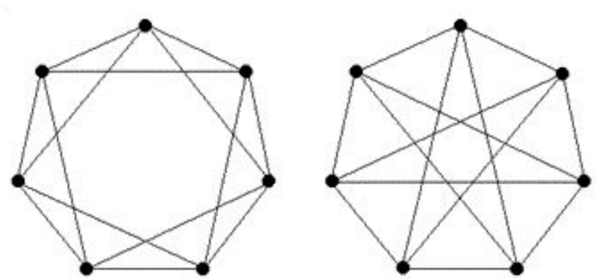
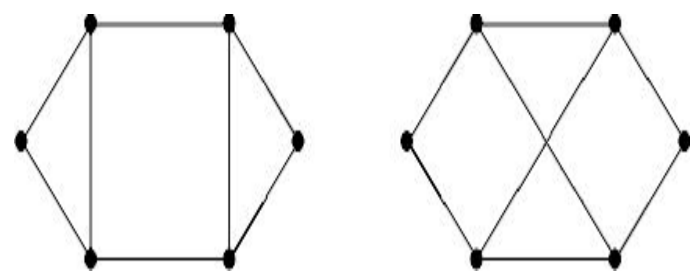
Первая диаграмма является иллюстрацией к задаче о колодцах.

- *Инвариант* – неизменяющаяся числовая характеристика объекта.

Инварианты графа - $n(G)$ и $p(G)$, смежность и инцидентность.

Изоморфизм графов

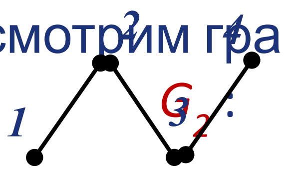
✔ **Задача:** Изоморфны ли следующие пары графов?

1		*3*	
2		*4*	

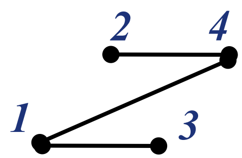
Операции над графами

- Дополнение $\overline{G}$ графа $G = (V, E)$ - это граф, имеющий в качестве множества вершин множество V, а две вершины в графе $\overline{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G, т.е. $E(\overline{G}) = \{e \in E(G) \mid e \notin E(G)\}$

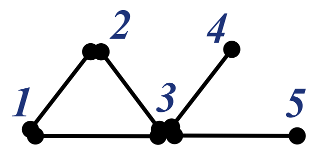
Рассмотрим графы $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.

G_1: 

G_2: 

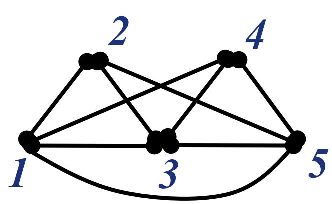
Дополнение $\overline{G_1}$: 

- *Объединением графов* G_1 и G_2 ($G_1 \cup G_2$), называется граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.



- *Пересечением графов* G_1 и G_2 ($G_1 \cap G_2$), называется граф $G = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

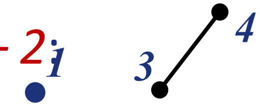
- *Соединением графов* G_1 и G_2 ($G_1 + G_2$), называется граф $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e = (u, v) \mid u \in G_1, v \in G_2\})$.



Операции над графами

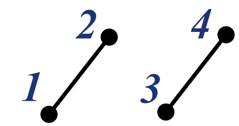
- *Удаление вершины v* из графа $G = (V, E)$ ($G - v$) дает граф $G' = (V \setminus \{ v \}, E \setminus \{ e = (a, b) \mid v \in \{a, b\} \})$.

$G_1 - 2$:



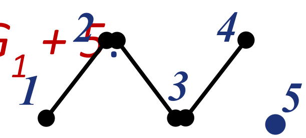
- *Удаление ребра e* из графа $G = (V, E)$ ($G - e$) дает граф $G' = (V, E \setminus \{ e \})$.

$G_1 - (2,3)$:



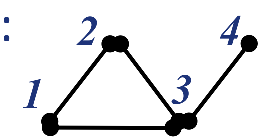
- *Добавление вершины v* в граф $G = (V, E)$ ($G + v$) дает граф $G' = (V \cup \{ v \}, E)$.

$G_1 + 5$:



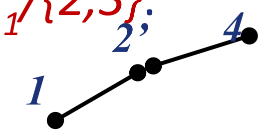
- *Добавление ребра e* в граф $G = (V, E)$ ($G + e$) дает граф $G' = (V, E \cup \{ e \})$.

$G_1 + (1,3)$:



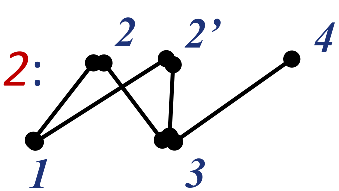
- *Стягивание подграфа F (A, B) к вершине v* (G/A) дает граф $G' = (V \setminus A \cup \{ v \}, E \setminus B \cup \{ e = (u, v) \mid u \in \Gamma(A) \setminus A\})$.

$G_1/\{2,3\}$:



- *Размножение вершины v* в графе $G = (V, E)$ ($G \uparrow v$) дает граф $G' = (V \cup \{ v' \}, E \cup \{ e = (u, v') \mid u \in \Gamma(v) \})$.

$G_1 \uparrow 2$:



Представления графов

Требования к представлению структур данных:

- минимальный объем занимаемой памяти;
- максимальная скорость обработки.

Существует четыре часто используемых представления

Представление графа	Объем памяти
матрица смежности	$n(p, q) = O(p^2)$
матрица инциденций	$n(p, q) = O(p \cdot q)$
списки смежности	$n(p, q) = O(p + 2q)$ [$n(p, q) = O(p + q)$]
массив ребер (или дуг),	$n(p, q) = O(2q)$.

Представление выбирается, исходя из потребностей конкретной задачи.

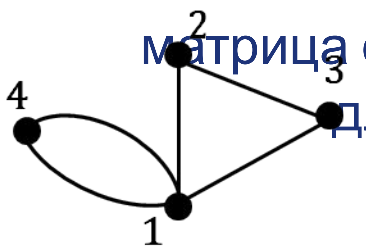
Матрица смежности

Пусть есть граф $G(V, E) = \langle V; E \rangle$, $|V| = n$, $|E| = p$.

• *Матрица смежности* графа – это квадратная матрица $S_{n\times n} = (S_{ij})$ $i,j = 1..n$, у которой строки и столбцы соответствуют вершинам графа, а элемент $S_{ij} = \rho(v_i)$, $i = 1..n$.

<u>Пример:</u> Есть два графа неорграф G и орграф F.

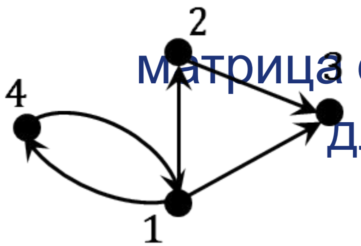
G :



матрица смежности для графа G :

	1	2	3	4
1	0	1	1	2
2	1	0	1	0
3	1	1	0	0
4	2	0	0	0

F :



матрица смежности для графа F :

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	0
3	0	0	0	0
4	1	0	0	0

Матрица смежности

Очевидно, что матрица смежностей неориентированного графа *симметрична относительно главной диагонали* ⟹ достаточно хранить только верхнюю треугольную матрицы.

Программно матрицу смежностей можно описать в виде массива:

```
Var
  S: array [1..n,1..n] of 0..m;
```

Матрица смежностей графа без петель и кратных ребер состоит только из нулей и единиц ⟹ можно рассматривать :

как *булев*

```
Var
  S: array [1..n,1..n] of 0..1;
  S: array [1..n,1..n] of boolean;
```

Представления графов

Матрица инциденций

- *Матрица инциденций* графа– это прямоугольная матрица $I_{n\times p} = (I_{ij}),\ i = 1..n,\ j = 1..p$ (n – число вершин, p – число ребер графа).

Для неориентированного графа значение элемента матри

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если вершина с номером } i \text{ инцидентна ребру } j, \\ 0, \text{если вершина с номером } i \text{ не инцидентна ребру } j. \end{cases}$$

Для с

$$I_{ij} = \begin{cases} -1, \text{если вершина с номером } i \text{ является началом ребра } j, \\ 1, \text{если вершина с номером } i \text{ является концом ребра } j, \\ 0, \text{ если вершина с номером } i \text{ не инцидентна ребру } j. \end{cases}$$

Представления графов

Матрица инциденций

Нумеровать ребра графа - занятие неблагодарное. Чаще их запоминают исходя из понятия отношения смежности.

матрица инциденций для *G*:

Матрица ребер

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,4)	(2,3)
1	1	1	1	1	0
2	1	0	0	0	1
3	0	1	0	0	1
4	0	0	1	1	0

матрица инциденций для *F*:

Матрица дуг

	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(4,1)
1	−1	−1	−1	0	1
2	1	0	0	−1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	−1

Программно матрицу инциденций описывают массивами

```
Var
  I: array [1..n,1..m] of 0..1;          {для неорграфа}

  I: array [1..n,1..ь] of -1..1;         {для орграфа}
```

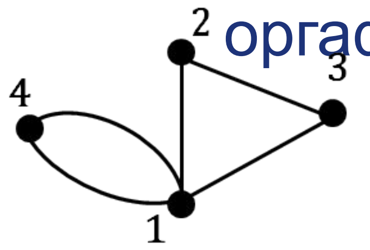
Представления графов

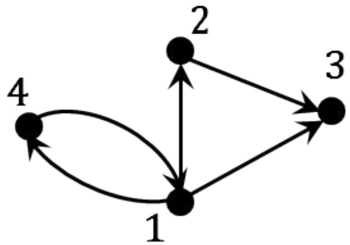
Списки смежностей

- *Списки смежностей* графа – списки *Sp(i)* смежных вершин для каждой вершины графа.

Пример:

Неограф *G*: орграф *F*:





списки смежностей для *G*:

$Sp(1) = \langle 2,3,4,4 \rangle$
$Sp(2) = \langle 1,3 \rangle$
$Sp(3) = \langle 1,2 \rangle$
$Sp(4) = \langle 1,1 \rangle$

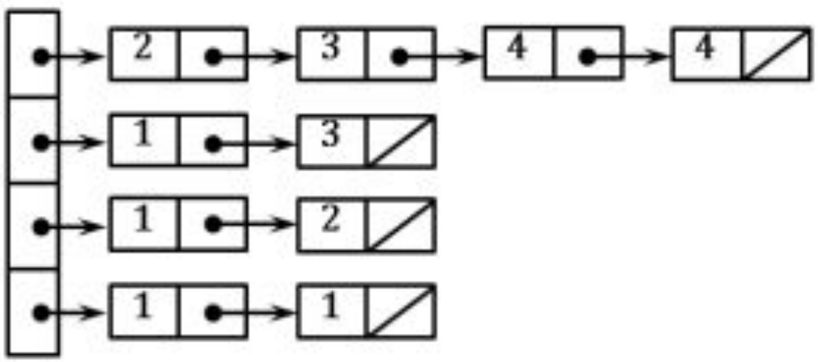
списки смежностей для *F*:

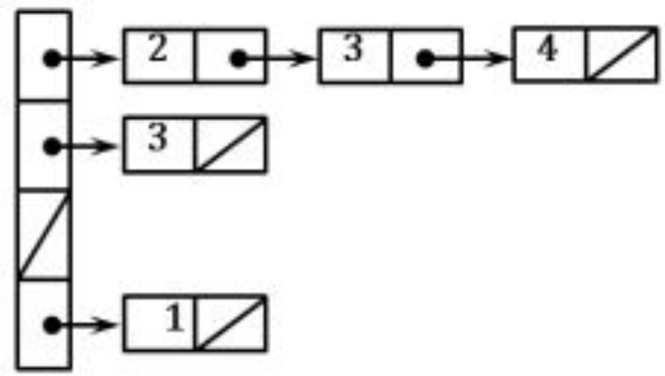
$Sp(1) = \langle 2,3,4 \rangle$
$Sp(2) = \langle 3 \rangle$
$Sp(3) = \emptyset$
$Sp(4) = \langle 1 \rangle$

Представления графов

Списки смежностей

Списки смежностей – это списочная структура, состоящая из массива указателей на списки смежных вершин.





Программно списки смежности описываются:

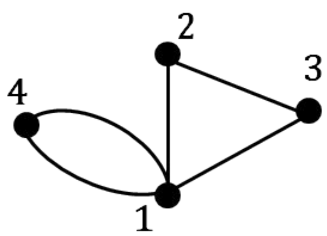
```
Type
  N = record
       v : 1..n;
       n : ↑N
     end;
Var
  Sp : array[1..n] of ↑N;
```

Представления графов

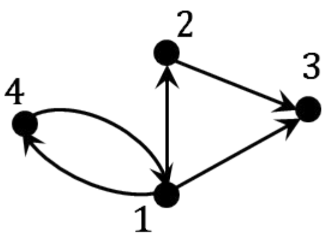
Массив дуг

Массив дуг графа – это списочная структура, состоящая из массива указателей на списки смежных вершин.

массив ребер для *G*: массив дуг для *F*:



$E(1) = (1,2)$
$E(2) = (1,3)$
$E(3) = (1,4)$
$E(4) = (1,4)$
$E(5) = (2,3)$



$E(1) = (1,2)$
$E(2) = (1,3)$
$E(3) = (1,4)$
$E(4) = (2,3)$
$E(5) = (4,1)$

Программно массивы дуг описываются:

```
Var
  E : array[1..m] of record
                           u : 1..n;
                           v : 1..n;
                        end;
```

Маршруты, цепи, циклы

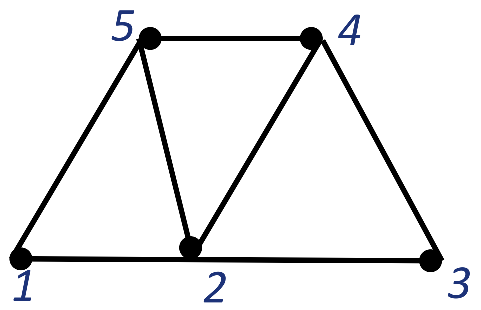
- *Маршрутом* в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны.
  - Если $v_0 = v_k$, то маршрут называется *замкнутым*.
- Если все ребра различны, то маршрут называется *цепью*.
  - Если все вершины различны, то маршрут называется *простой цепью*.
  - В цепи $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называют *концами* цепи. Говорят, что цепь с концами u, v *соединяет* вершины u и v. *Обозначение:* $<u, v>$.
  - *Длина маршрута* – количество ребер, участвующих в маршруте.

Маршруты, цепи, циклы

- Замкнутая цепь называется *циклом*.
- Число циклов в графе G обозначается $z(G)$.
- Замкнутая простая цепь называется *простым циклом*.

Пример:

маршрут, но не цепь;	*1, 2, 5, 2, 4*
цепь, но не простая цепь:	*1, 2, 4, 5, 2, 3*
простая цепь:	*5, 4, 2, 3*
цикл, но не простой цикл:	*2, 5, 1, 2, 3, 4, 2*
простой цикл:	*1, 2, 5, 1*



Связность

Маршруты, цепи, циклы

- *Ациклический* граф - граф без циклов.

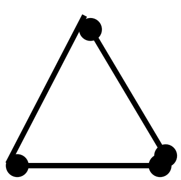
Если граф ориентированный, то:

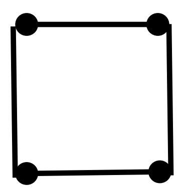
цепь называется *путем*,

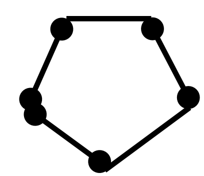
цикл называется *контуром*.

- Граф, состоящий из *простого цикла с k вершинами*, обозначается C_k.

<u>Пример</u>:







C_3 – треугольник C_4 – квадрат C_5 - пятиугольник

Маршруты, цепи, циклы

- *Две вершины в графе связаны, если существует соединяющая их простая цепь.*
- *Расстоянием* между вершинами u и v называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей u и v.

Обозначение: $d(u, v)$

Свойства:

1. $d(u, v) \geq 0$;
2. $d(u, v) = d(v, u)$;
3. Если u и v не связаны, то $d(u, v) = \infty$;
4. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
5. $d(u, v) + d(v, t) \geq d(u, t)$.

- Самая кратчайшая цепь называется *геодезической*.

Связность

Маршруты, цепи, циклы

- *Обхват* графа - это длина кратчайшего простого цикла.

Обозначение: $g(G)$

- *Окружение* графа - длина максимального простого цикла.

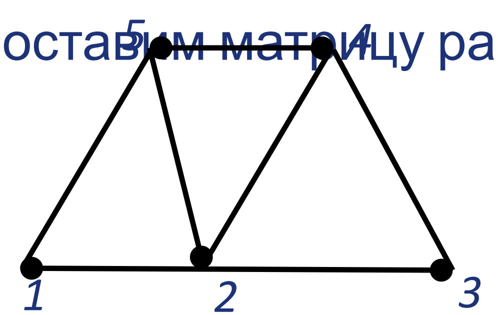
Обозначение: $c(G)$

- *Диаметр* графа - длина самой длинной геодезической.

Обозначение: $d(G)$

<u>Пример:</u>

Составим матрицу рассто фа:



$d(G) = 2$

$g(G) = 3$

$c(G) = 5$

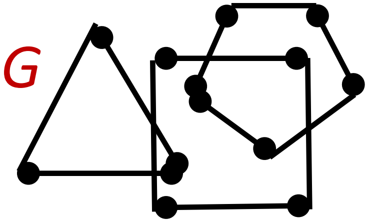
	1	2	3	4	5
1	0	1	2	2	1
2		0	1	1	1
3			0	1	2
4				0	1
5					0

Связность

- Граф, в котором все вершины связаны, называется связным.
- Компонента графа G (компонента связности графа) – максимальный связный подграф графа G.

$k(G)$ – число компонент связности графа G

Граф G – связнен $\Leftrightarrow k(G) = 1$



- Если $k(G) > 1$, то граф называется ***несвязным***.

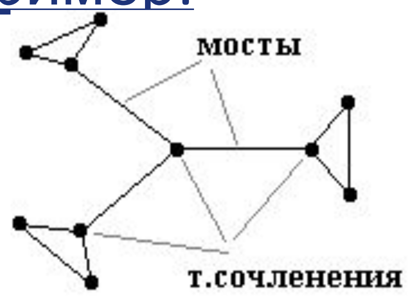
$k(G) = 3$

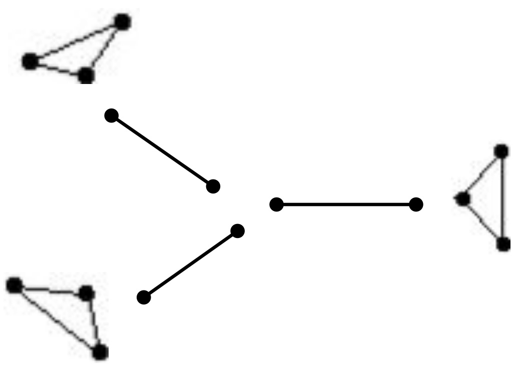
❑ **Теорема:** Если граф G имеет n вершин и k компонент связности, то максимально возможное количество ребер в нем $p(n, k) = ½(n - k + 1)(n - k)$

Связность

- Точка сочленения – это вершина, удаление которой приводит к увеличению числа компонент связности графа.
- Мост – это ребро, удаление которого приводит к увеличению числа компонент связности графа.
- *Блок* – связный граф, не имеющий точек сочленения.

Пример:





Граф *G*

Блоки графа *G*

Связность

<u>Характеристики связности:</u>

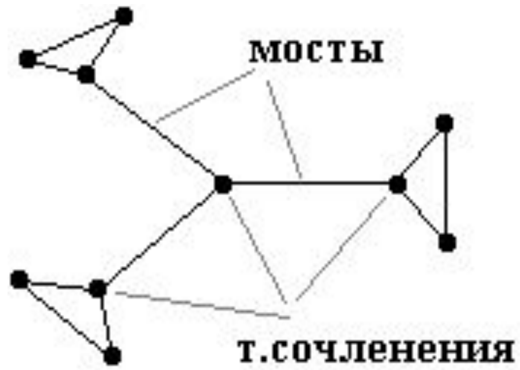
1. *Числом вершинной связности* (*числом связности*) - наименьшее количество вершин, удаление которых увеличивает число компонент графа.

Обозначение: $\varkappa(G)$

<u>Пример:</u> $\varkappa(K_1) = 0$; $\varkappa(K_p) = p - 1$; $\varkappa(C_p) = 2$.

2. *Числом реберной связности* – минимальным количество ребер, удаление которых увеличивает число компонент графа.

Обозначение: $\lambda(G)$

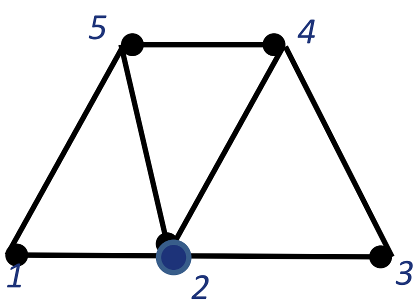


$\varkappa(G) = 1$

$\lambda(G) = 3$

Связность

- *Эксцентриситетом e(v)* вершины v в связном графе $G(V, E)$ называется максимальное расстояние от вершины v до других вершин графа G: $e(v) = \max d(v, u)$.
- *Радиусом* $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин: $R(G) = \min e(v)$.
- Вершина v называется *центральной*, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, $e(v) = R(G)$.
- Множество центральных вершин называется *центром* и обозначается $C(G)$: $C(G) = \{ v \in V \mid e(v) = R(G)\}$.



	1	2	3	4	5	*e*
1	0	1	2	2	1	*2*
2	1	0	1	1	1	*1*
3	2	1	0	1	2	*2*
4	2	1	1	0	1	*2*
5	1	1	2	1	0	*2*

$R(G) = 1$

$C(G) = \{2\}$

Связность

- *Двудольный* граф (*биграф, четный граф*) - это граф $G(V, E)$, множество вершин V которого можно разбить на два подмножества V_1 и V_2 таким образом, что каждое ребро графа G соединяет вершины из разных множеств.

Говорят: ребра графа G соединяют множества V_1 и V_2.

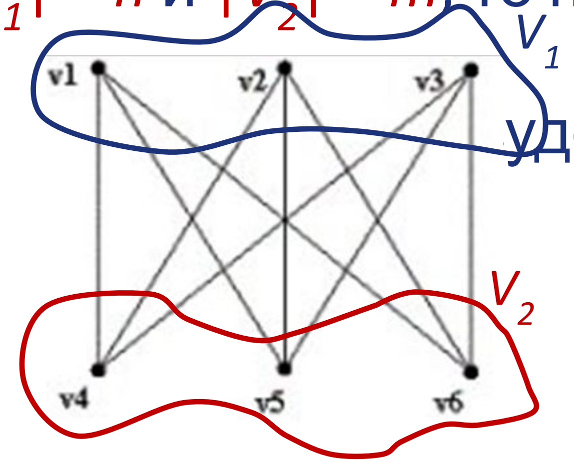
- Множества V_1 и V_2 - доли графа G.

- **Теорема:** Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.

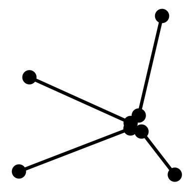
- *Полный двудольный* граф - это двудольный граф $G(V, E)$, содержащий все ребра, соединяющие подмножества V_1 и V_2.

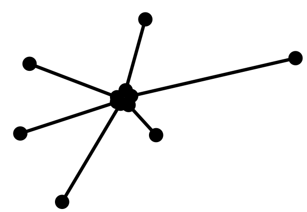
Обозначение:

если $|V_1| = n$ и $|V_2| = m$, то полный двудольный граф – $K_{n,m}$



Пример: удольный граф $K_{3,3}$



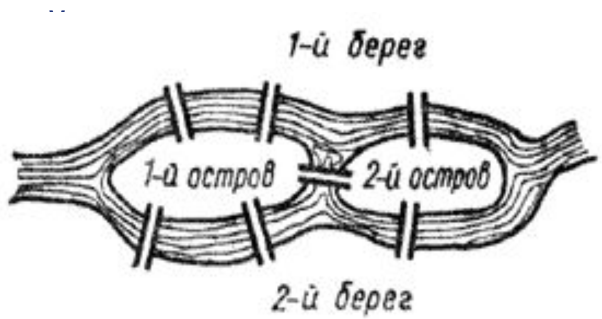


- *Звезда* - граф типа $K_{1,n}$.

$K_{1,4}$ $K_{1,6}$

Эйлеровы графы

✔ **Задача Эйлера:** Найти маршрут, проходящ
по всем четырем участкам суши по одному р
При этом через каждый из мостов можно
проходить только по одному разу, а конец и
начало пути должны совпадать.



✔ **Задача теории графов:** Найти в данном графе *G* цикл, содержащий все вершины и все ребра.

- *Эйлеров цикл* – замкнутая цепь, содержащая все вершины и все ребра графа.
- Граф называется *Эйлеровым*, если он содержит эйлеров цикл.
- Если граф содержит непростую цепь, содержащую все ребра графа, то цепь называется *эйлеровой*,
  а граф - *полуэйлеровым*.

Эйлеровы графы

- **Лемма:** *Если степень каждой вершины графа не меньше 2, то он содержит цикл.*

  Доказательство:

  очевидно, так как построение такого маршрута возможно, если нет висячих вершин.

- **Теорема:** *Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*
  1. *G - эйлеров граф;*
  2. *каждая вершина графа G имеет четную степень;*
  3. *множество ребер графа можно разбить на простые циклы.*

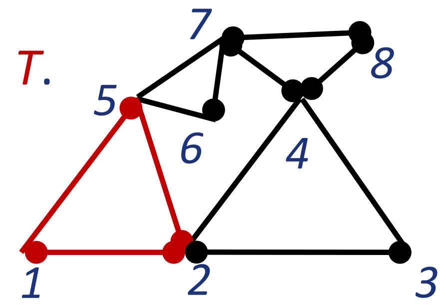
Эйлеровы графы

Доказательство:

1 ⇒ 2 Очевидно, что эйлеров граф *G* содержит эйлеров цикл *T*. Прохождение этого цикла вносит в степень каждой вершину 2. Значит, степени всех вершин – четны.

2 ⇒ 3 Т.к. граф *G* - связен, нетривиален и степени всех вершин четны, то

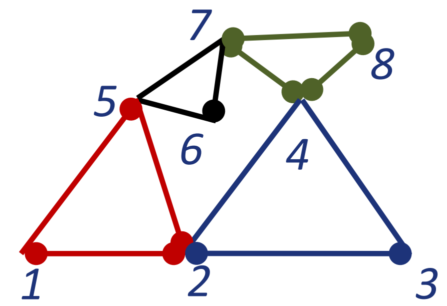
∃ *T* - простой цикл. Удалим из графа *G* ребра цикла *T*.



Получим граф G_1 - остовный подграф графа *G* с четными вершинами.

Если G_1 – нуль-граф, то все доказано, иначе повторим процедуру снова:

работаем с графом G_1 и получаем граф G_2, в котором все вершины четны и т.д.

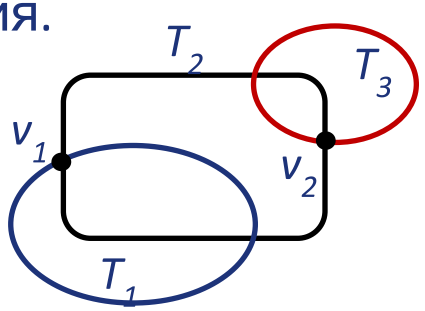


В итоге, с пустым графом G_n получаем разбиение множества ребер графа *G* на *n* простых циклов.

Эйлеровы графы

Доказательство:

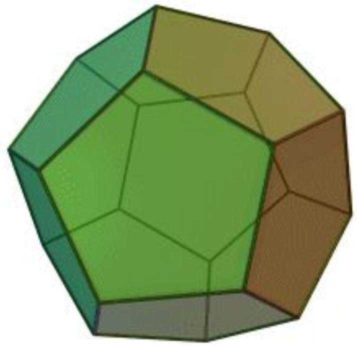
$3 \Rightarrow 1$ Допустим T_1 - некоторый цикл из разбиения.
Если G состоит только из T_1, все доказано.
Иначе, есть еще T_2, имеющий с T_1 общую вершину v_1 и не имеющий общих ребер.
Если $G = T_1 \cup T_2$, все доказано.
Иначе, есть еще T_3, имеющий общую вершину v_2 с $T_1 \cup T_2$ и не имеющий общих ребер с $T_1 \cup T_2$. И.т.д.
Будем наращивать эйлеров цикл до тех пор, пока не исчерпаем все разбиения.



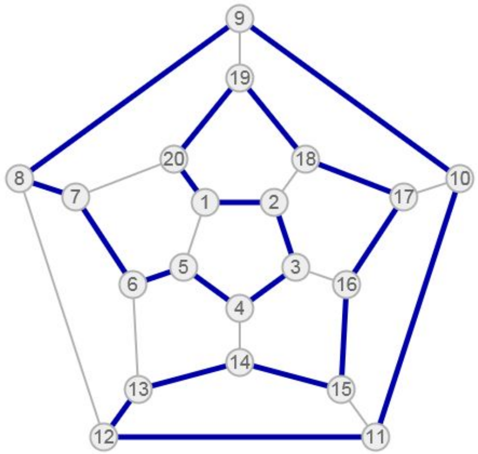
- **Следствие 1:** Если связный граф имеет $2n$ нечетных вершин ($n \geq 1$), то множество его ребер можно разбить на n открытых цепей.

- **Следствие 2:** Связный граф с двумя нечетными вершинами является полуэйлеровым.

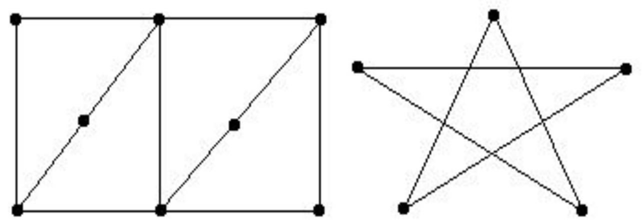
Гамильтоновы графы



- **Игра «Вокруг света»** (В. Гамильтон, 1859г.): Каждой вершине додекаэдра приписано названи известного города. Необходимо обойти «вокруг света» по ребрам многогранника, побывав в Каждом городе ровно один раз и вернуться домо



- **Задача теории графов:** Найти остовной цикл в графе додекаэдра.
  - Простой цикл, содержащий все вершины графа, называется *гамильтоновым*.
  - *Гамильтонов* граф – граф, в котором имеется гамильтонов цикл.



Гамильтоновы графы

Достаточные условия наличия в графе гамильтонова цикла:

1. Граф со степенной последовательностью $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ является гамильтоновым, если для всякого k, удовлетворяющего неравенствам $1 \leq k < n/2$, выполняется условие $(d_k \leq k) \Rightarrow (d_{n-k} \geq n - k)$;
2. Если в G с $n > 3$ для любой вершины степень не меньше $n/2$, то граф гамильтонов;
3. Если для любой пары несмежных вершин сумма их степеней больше либо равна n, то это гамильтонов граф.

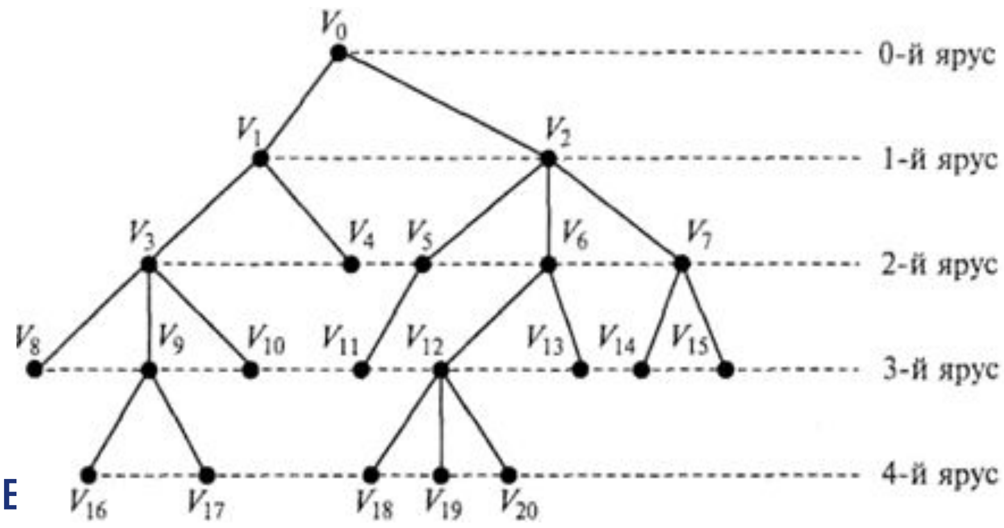
Гамильтоновы графы

- **Задача коммивояжера:** Имеется *n* городов, расстояния между которыми известны. Коммивояжер должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города *2, 3, …, n* и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь коммивояжера был кратчайшим?

- **Задача теории графов:** имеется полный ориентированный граф $G = (V, E)$, каждой дуге e которого сопоставлен вес $c(e)$. Требуется найти в этом графе гамильтонов контур наименьшей стоимости.

Деревья

- *Лес* (*ациклический* граф) - граф без циклов.
- *Дерево* (*свободное*) - это связный ациклический граф.
- *Корневое* дерево – дерево с *корнем* (выделенной вершиной).



- v_0 – корень дерева
- v_8, v_{16}, … - *листья дерева*
- *Крона* – множество листьев дерева.
- *Уровень* вершины - расстояние до корневой вершины v_0 .
- *Ярус* – множество вершин одного уровня.

Деревья

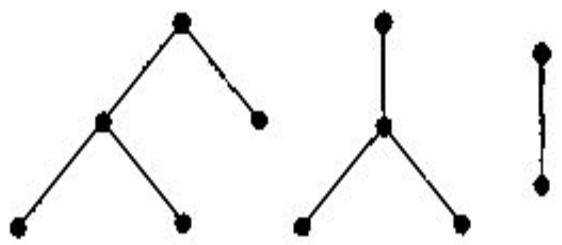
- **Теорема:** Для графа G следующие утверждения эквивалентны:
  1) G – дерево;
  2) любые две вершины в графе G соединены единственной простой цепью;
  3) G – связный (n, p)-граф и $p = n - 1$;
  4) G – ациклический граф и (n, p)-граф и $n = p + 1$;
  5) G – ациклический граф и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл;
  6) G – связен, отличен от K_n $(n \geq 3)$, и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл;
  7) G – граф, отличный от $K_3 \cup K_1$ и $K_3 \cup K_2$, $n = p + 1$ и если между несмежными вершинами добавить ребро, то в полученном графе будет ровно один простой цикл.

Деревья

- **Следствие 1:** В любом нетривиальном дереве существует по крайней мере две висячие вершины.

- **Следствие 2:** Каждая невисячая вершина свободного дерева является точкой сочленения.

- **Следствие 3:** Если в связном графе нет висячих вершин, то в нем есть цикл.

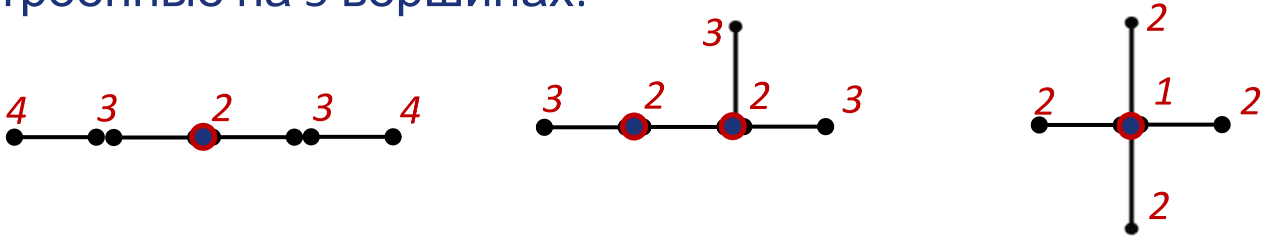


- **Теорема:** Центр свободного дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин:
  $(z(G) = 0$ и $k(G) = 1) \Rightarrow (C(G) = K_1$ или $C(G) = K_2)$.

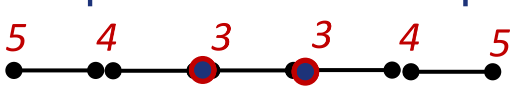
Пример:

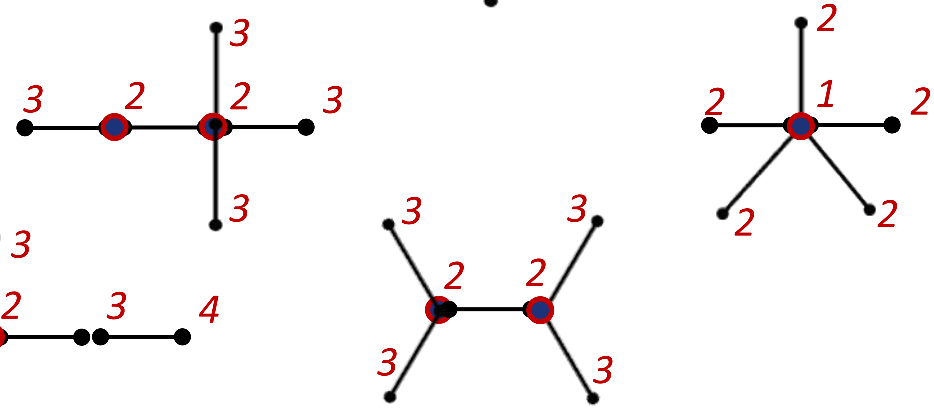
Свободные деревья с эксцентриситетами вершин и центрами,

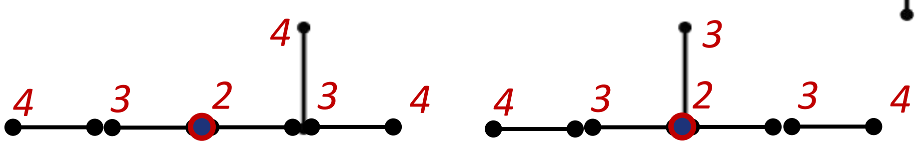
построенные на 5 вершинах:



Построенные на 6 вершинах:





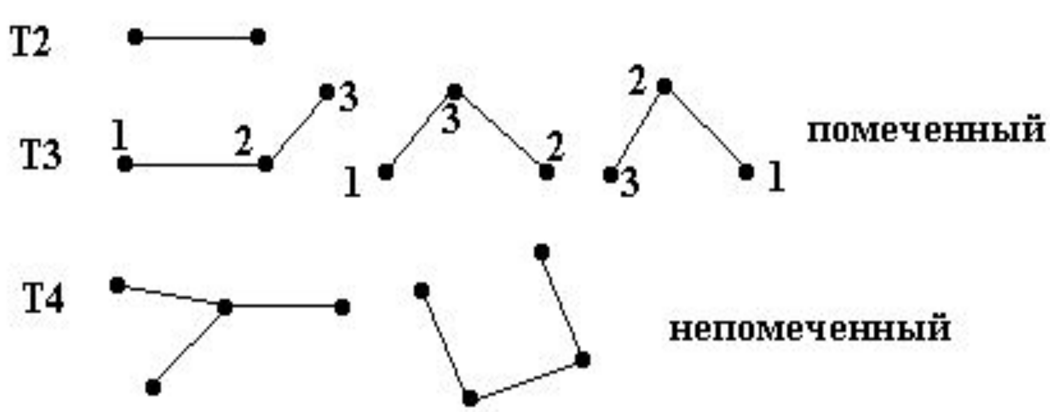


Деревья

✔ **Задачи теории перечисления деревьев:**

1) подсчитать число неизоморфных деревьев, построенных на n вершинах и обладающих заданными свойствами;
2) перечислить все возможные деревья.

❑ **Теорема Келли:** всего может быть построено на n вершинах n^{n-2} помеченных неизоморфных деревьев.



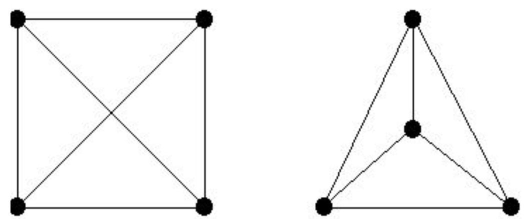
Деревья

- **Задача:** Имеется n городов, которые нужно соединить сетью железных дорог таким образом, чтобы из каждого города можно было попасть в любой другой. Для каждой пары городов известна стоимость строительства дороги. Требуется найти самый дешевый вариант строительства.

- **Задача теории графов:** имеется полный граф $G = (V, E)$. Найти на взвешенном полном графе из n вершин остовное дерево наименьшей длины.

Плоские графы

- Граф *укладывается на некоторой поверхности*, если его можно нарисовать на этой поверхности так, чтобы его ребра не пересекались.
- *Плоский* граф – граф, уложенный на плоскости.
- *Планарным* называется граф, который изоморфен плоскому.



Планарный граф и его укладка

- *Грань* графа - максимальное по включению множество точек плоскости, каждая пара которых может быть соединена кривой, не пересекающей ребра графа.
- *Граница грани* - множество вершин и ребер, принадлежащих этой грани (или цикл, ее образующий).

Плоские графы

- **Теорема Эйлера:** Если G - связный плоский (n,p)-граф, имеющий f-граней, тогда $n + f - p = 2$.

- **Следствие 1:** Пусть G планарен и у него n вершин, p ребер, f граней и k компонент связности, тогда

$$n + f - p - k = 1.$$

- **Следствие 2:** Если G - связный планарный граф, имеющий хотя бы один цикл нечетной длины, то $p \le 3n - 6$.

- **Следствие 3:** Число граней любой плоской укладки связного планарного (n,p)-графа постоянно и равно

$$p - n + 2.$$

Т.е. число граней планарного графа не зависит от способа его укладки на плоскости.

Раскраска графа

- *Раскраска* графа – это приписывание цветов вершинам графа так, чтобы смежные вершины были разных цветов.
- *Одноцветный класс* - множество всех вершин одного цвета.
- *Хроматическое число* – наименьшее возможное количество цветов *в раскраске графа*.

Обозначение: $\chi(G)$

- Граф называется n-раскрашиваемым, если в раскраске графа использовано *n цветов.*

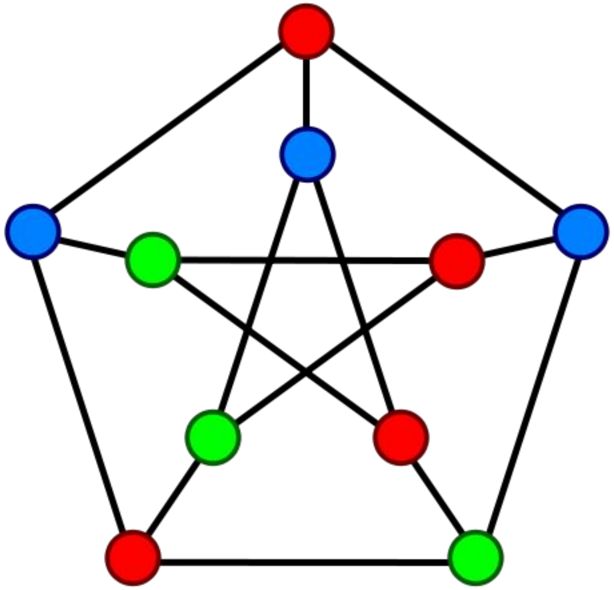
❑ **Теорема:** Граф двуцветен тогда и только тогда, когда в нем нет нечетных простых циклов.

❑ **Теорема:** $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Раскраска графа

- **Теорема (о пяти красках):** Всякий планарный граф можно раскрасить пятью красками.

<u>Пример:</u> граф Петерсона



Раскраска графа

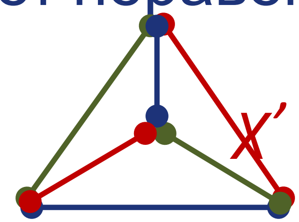
- Говорят, что граф *G* - *n-реберно раскрашиваем*, если необходимо *n* красок, чтобы раскрасить ребра графа таким образом, чтобы любые смежные ребра были разных цветов.

- *Хроматический класс* – число красок, необходимых для реберной раскраски графа.

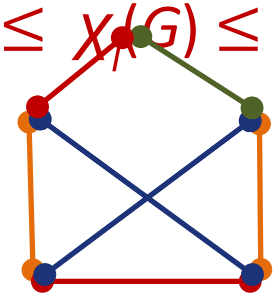
Обозначение: $\chi'(G)$

- **Теорема:** Для каждого графа *G* хроматический класс удовлетворяет неравенствам $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Пример: $\chi' = \Delta$

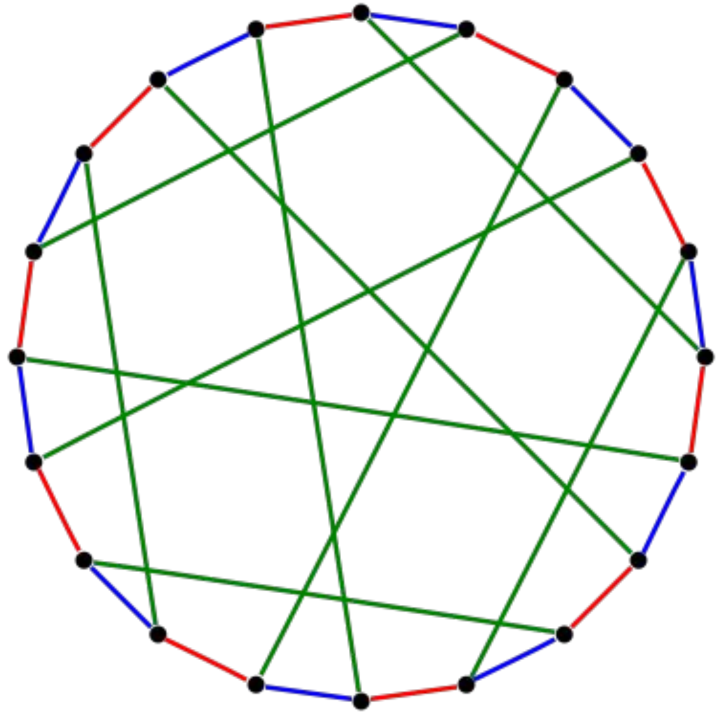


$\chi' = \Delta + 1$



Раскраска графа

Пример: рёберной раскраски



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ