Лекция. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Алгоритмы методов: Гаусса и Гаусса-Зейделя.

Определения, понятия, обозначения

A = $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$

Основная матрица системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица столбец неизвестных переменных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матрица столбец свободных членов

Решение СЛАУ

- **Решением системы линейных алгебраических уравнений** называют набор значений неизвестных переменных x1 = a1, a2=a2… xn=an, обращающий все уравнения системы в тождества. Матричное уравнение AX=B при данных значениях неизвестных переменных также обращается в тождество .
- Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.
- Если система уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.
- Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.
- Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Метод Гаусса

Ме́тод Га́усса — классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Назван в честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса. Это метод последовательного исключения переменных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы.

Решение СЛАУ методом Гаусса

Этапы:

1. Необходимо сделать единицы на главной диагонали и нули ниже главной диагонали;
2. Обратная подстановка (для системы 3x3):
   1. x2 = b2
   2. x1 = (b1-a12*x2)/a11
   3. x0 = (b0-a01*x1-a02*x2)/a00

Решение СЛАУ методом Гаусса

Алгоритм

1. Проверить условие a[0,0] != a[1,1] != a[2,2] != 0, в случае необходимости поменять строки местами;
2. Составить матрицу коэффициентов уравнения;
3. цикл по i

запомнить значение a[i,i]
в цикле, разделить i-ю строку на значение a[i,i]

цикл по k (индекс строк ниже i-ой строки)
   запомнить значение a[k,i]
   в цикле, домножить i-ю строку на значение –a[k,i] и сложить с k-ой строкой

1. Обратная подстановка (расчет по уравнениям)
2. Проверка решения, подстановка полученных результатов в исходную систему уравнений

Алгоритм Гаусса

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна.

Метод Гаусса - Зейделя

Метод Гаусса — Зейделя (метод Зейделя, процесс Либмана, метод последовательных замещений) — является классическим итерационным методом решения системы линейных уравнений.

Метод Гаусса - Зейделя

Этот метод является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.
Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-й компоненты (k+1)-го приближения сразу используются уже найденные компоненты (к +1) -го приближения с меньшими номерами .

Метод Гаусса - Зейделя

Алгоритм
1-2 пункты аналогичны
3. Объявить векторы решений old_x и new_x;
4. Переприсваивание векторов (old_x = new_x);
5. Вычислить новые значения вектора new_x
new_x[0] = (a03 – a01*old_x[1] – a02*old_x[2])/a00
new_x[1] = (a13 – a10*new_x[0] – a12*old_x[2])/a11
new_x[2] = (a23 – a20*new_x[0] – a21*new_x[1])/a22
6. Найти массив погрешностей error
error[i] = fabs((new_x[i]-old_x[i])/new_x[i])
7. Найти максимальное значение погрешностей MAX
8. Повторять пункты 4-7, если MAX>E