



ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. Предел функции в точке.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

1.1. Предел многочлена.

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 5x + 4) = 2^3 - 5 \cdot 2 + 4 = 2$$

1.2. Предел дробно-рациональной функции.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{R(x)}$$

Раскрытие неопределенности

$$\left(\frac{0}{0} \right)$$

- разложите числитель или (и) знаменатель на множители,
- сократите дробь,
- вычислите предел.



Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 13x + 30}{100 - x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(x-3)}{(10-x)(10+x)} =$$

$$- \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-3)}{(10+x)} = - \frac{7}{20} = -0.35$$

1.3. Предел иррациональной функции.

Раскрытие неопределенности

$$\left(\frac{0}{0} \right)$$

- домножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю или (и) знаменателю,
- упростить выражение и сократить дробь,
- вычислить предел.



Примеры:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{x(1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (x+1)}{x(1 + \sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(1 + \sqrt{x+1})} =$$

$$-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \sqrt{x+1})} = -\frac{1}{1+1} = -0.5$$

2. Предел функции на бесконечности .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

2.1. Раскрытие неопределенности

$$\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

- разделите числитель и знаменатель на переменную в большей степени,
- примените свойство бесконечно малых и бесконечно больших величин

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty$$

- вычислите предел.



Примеры:

большая степень числителя превышает большую степень знаменателя, следовательно, предел стремится к бесконечности.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7}{5x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 / x^3 - 7 / x^3}{5x^2 / x^3 - 4 / x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \boxed{7 / x^3}}{\boxed{5 / x} - \boxed{4 / x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 0}{0 - 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{0} = \infty$$

Примеры:

большая степень числителя совпадает с большей степенью знаменателя, следовательно, предел - отличное от нуля число.

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 3x + 1}{5x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 / x^3 - 3x / x^3 + 1 / x^3}{5x^3 / x^3 - 2 / x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \boxed{3 / x^2} + \boxed{1 / x^3}}{5 - \boxed{2 / x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - 0 + 0}{5 - 0} = \frac{6}{5} = 1.2$$

Примеры:

большая степень числителя меньше
большей степени знаменателя,
следовательно, предел равен нулю.

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x}{7x^6 - 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 / x^6 - 4x / x^6}{7x^6 / x^6 - 8 / x^6} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\boxed{3 / x^3} - \boxed{4 / x^5}}{7 - \boxed{8 / x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 0}{7 - 0} = 0$$

3. Замечательные пределы.

3.1. Первый замечательный предел.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$$

Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{5}{5} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{1} = 1 \cdot 5 = 5$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{\sin 8x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 13x}{\sin 8x} = \frac{13}{8}$$