

# ЛЕКЦИЯ 3

## Анализ временных рядов экономических процессов

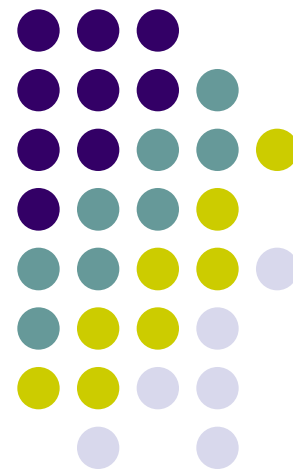
**Вопрос 1.** Основные понятия и определения.

**Вопрос 2.** Этапы построения прогноза по временным рядам

**Вопрос 3.** Адаптивные модели прогнозирования

**Вопрос 4.** Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям

**Вопрос 5.** Модели стационарных и нестационарных временных рядов



### Динамический ряд

- **Динамический ряд** – совокупность наблюдений некоторого явления, упорядоченная в зависимости от последовательности значений другого явления.
- **Временной ряд**
  - – это динамический ряд, у которого в качестве признака упорядочения используется время.
  - – это набор чисел, привязанный к последовательным, обычно равноотстоящим моментам времени.
  - Числа, составляющие временной ряд и полученные в результате наблюдения заходом некоторого процесса, называются **уровнями (элементами)**.
- **Длина временного ряда** – количество входящих в него уровней  $n$ :  
$$Y(t), \text{ где } t=1..n.$$

### Основные составляющие временного ряда

- **Детерминированная**

- числовая последовательность, элементы которой вычисляются по определенному правилу как функция времени  $t$ .

- **Случайная**

- это составная часть временного ряда, оставшаяся после выделения систематических компонент.

### Структурные компоненты детерминированной составляющей

1. **Тренд, или тенденция  $f(t)$** -устойчивая закономерность, наблюдаемая в течение длительного периода времени.
2. **Сезонная компонента  $S(t)$**  –регулярные колебания, которые носят периодический или близкий к нему характер и заканчивается в течение года.
3. **Циклическая компонента  $U(t)$**  – неслучайная функция, описывающая длительные периоды относительного подъема и спада и состоящие из циклов переменной длительности и амплитуды.

### Случайная составляющая

Случайная  $\varepsilon(t)$

- это составная часть временного ряда, оставшаяся после выделения систематических компонент;
- отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера.

**Стационарные случайные процессы** – это сравнение величины  $\varepsilon(t)$  с хорошо изученной формой случайных процессов.

**Стационарным процессом называется в узком смысле:**

- это такой случайный процесс, вероятностные свойства которого с течением времени не изменяются.
- Протекает в приблизительно однородных условиях и имеет вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения.

**в широком смысле (слабой стационарности):**

- неизменность во времени среднего значения, дисперсии и ковариации временного ряда.

### Модели временных рядов

(в зависимости от вида связи между компонентам)

- **Аддитивные модель**

$$Y(t) = f(t) + S(t) + U(t) + \varepsilon(t)$$

- **Мультипликативная модель**

$$Y(t) = f(t)S(t)U(t) + \varepsilon(t)$$

### Цель стат.анализа временных рядов

- изучить соотношение между закономерностью и случайностью в формировании значений уровней ряда и оценить количественную меру их влияния.

Закономерности, обедняющие динамику показателя в прошлом, используются для прогнозирования его значений в будущем.

Учёт случайности позволяет определить вероятность отклонения от закономерного развития его возможную величину.

### Требования к исходным данным

1. Сопоставимость данных - данные должны иметь одинаковые:
  - единицы измерения
  - шаг наблюдений
  - интервал времени
  - Методику расчета
  - элементы неизменной совокупности
2. Однородность данных – отсутствие:
  - сильных изломов тенденций
  - аномальных наблюдений
3. Устойчивость тенденции – преобладание закономерности над случайностью в изменении уровня ряда.
4. Полнота данных



# Экстраполяция

- **Экстраполяция** – это распространение выделенных признаков при анализе рядов динамики закономерностей развития изучаемого объекта на будущее.

### Этапы экстраполяционного прогнозирования экономических процессов:

1. Предварительный анализ данных
2. Построение моделей временных рядов
  - формирование набора аппроксимирующих функций
  - численное оценивание параметров моделей;
3. Оценка качества моделей
4. Построение точечного и интервального прогнозов

# Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

## 1. Предварительный анализ данных

1.Предвари-  
тельный  
анализ  
данных

**Определяют:** Соответствуют ли имеющиеся данные требованиям, предъявляемым к ним математическими методами?

**Строят:** график динамики (на оси абсцисс –  $t$ , на оси ординат –  $Y(t)$ )

**Рассчитывают:** основные динамические характеристики:

- приросты,
- темпы роста,
- темпы прироста,
- коэффициенты автокорреляции.

### Процедуры предварительного анализа

- 2) Выявление аномальных наблюдений
- 3) Проверка наличия тренда.
- 4) Сглаживание временного ряда.
- 5) Расчет показателей динамики экономических процессов.

2. Построени  
е  
моделей  
временных  
рядов

3. Оценка  
качества  
моделей

4. Построени  
е  
точечного и  
интерваль-  
ного  
прогнозов

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

- 1.Предварительный анализ данных
2. Построение моделей временных рядов
3. Оценка качества моделей
4. Построение точечного и интервального прогнозов

### Процедуры: 1) Выявление аномальных наблюдений

- Рассчитывается и сравнивается с критическим значением Критерия Ирвина:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}}$$

| Число наблюдений | $\lambda$ |        |
|------------------|-----------|--------|
|                  | P=0,95    | P=0,99 |
| 2                | 2,8       | 3,7    |
| 3                | 2,2       | 2,9    |
| 10               | 1,5       | 2,0    |
| 20               | 1,3       | 1,8    |
| 30               | 1,2       | 1,7    |
| 50               | 1,1       | 1,6    |
| 100              | 1         | 1,5    |
| 400              | 0,9       | 1,3    |
| 1000             | 0,8       | 1,2    |

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

### Процедуры:

#### 2) Проверка наличия тренда

- сводится к проверке гипотезы о неизменности среднего значения временного ряда.

#### **Критерии поверки наличия неслучайной составляющей**

- Критерий серий, основанный на медиане
- Критерий проверки гипотезы о неизменности среднего значения временного ряда
- Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий

1.Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

|                                                   |
|---------------------------------------------------|
| 1.Предварительный анализ данных                   |
| 2. Построение моделей временных рядов             |
| 3. Оценка качества моделей                        |
| 4. Построение точечного и интервального прогнозов |

### Процедуры:

#### 2) Проверка наличия тренда

##### - Критерий серий, основанный на медиане:

- Формула выборочной медианы

$$Y_{\text{med}} = \begin{cases} y_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{если } n\text{-нечетное,} \\ \frac{1}{2} \left( y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}+1} \right) & \text{, если } n\text{-четное.} \end{cases}$$

- образуем серии «плюсов» и «минусов»:
- «Плюс» если  $y(t) > y_{\text{med}}$ ,
- «Минус» если  $y(t) < y_{\text{med}}$

Под «серией» понимается последовательность плюсов подряд идущих плюсов и подряд идущих минусов:

$v(n)$  – общее число серий;

$K_{\text{max}}$  – протяженность самой длинной серии.

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

1. Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

### Процедуры:

#### 2) Проверка наличия тренда

- Критерий проверки гипотезы о неизменности среднего значения временного ряда

- Если хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} v(n) > \left[ \frac{1}{2}(n+2-1,96\sqrt{n-1}) \right], \\ K_{\max} < [3,3(\lg n + 1)] \end{cases}$$

окажется нарушенным, то гипотеза о неизменности среднего значения отвергается с вероятностью  $\alpha$  ( $0,05 < \alpha < 0,0975$ )

**=> Подтверждается наличие зависящей от времени неслучайной составляющей.**

### Процедуры:

#### 2) Проверка наличия тренда

##### - Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий

- улавливает постепенное смещение среднего значения в исследуемом распределении:

- монотонного характера;
- периодического характера.

##### Правило расставления «+» и «-»

- «Плюс», если  $y_{t+1} - y_t > 0$

- «Минус», если  $y_{t+1} - y_t < 0$

При уровне значимости  $0,05 < \alpha < 0,0975$  критерий имеет вид:

$$\begin{cases} v(n) > \left[ \frac{2n-1}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right], \\ K_{\max} < [K_0(n)] \end{cases}$$

$K_0(n) = 5$  при  $n \leq 26$ ;

$K_0(n) = 6$  при  $26 \leq n \leq 153$

$K_0(n) = 7$  при  $153 \leq n \leq 1170$ .

1. Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов



## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

|                                                   |
|---------------------------------------------------|
| 1.Предварительный анализ данных                   |
| 2. Построение моделей временных рядов             |
| 3. Оценка качества моделей                        |
| 4. Построение точечного и интервального прогнозов |

### Процедуры: 2) Проверка наличия тренда Сравнение средних уровней ряда

#### Проверка гипотезы о равенстве средних двух нормально распределённых совокупностей

##### Алгоритм проверки

1. Делим исходный ряд на две примерно равные по числу уровней частей.
2. Для каждой из этих частей вычисляем среднее значение и дисперсии.
3. Проверяем гипотезу о равенстве (однородности) дисперсий обеих частей ряда ( по F-критерию Фишера):
  1. делим большую дисперсию на меньшую;
  2. сравниваем с табличным;
  3. Если  $F_{расч} < F_{табл}$ , то с вероятностью  $\alpha$  :
    - нет оснований отвергать нулевую гипотезу, выборочные дисперсии различаются незначительно
4. Проверяем основную гипотезу о равенстве средних значений (с использ. t-критерия Стьюдента):
  - Если  $|t_{расч}| < t_{табл}$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве средних.

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_{y_1}^2 + (n_2 - 1)S_{y_2}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$



## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

### Процедуры:

#### 3) Сглаживание временного ряда

- замена фактических уровней расчетными значениями, имеющими меньшую колеблемость.

Сглаживание рядов поводится:

- При графическом изображении временно ряда тренд отслеживается неотчетливо;
- При необоротимости по задаче;
- При устранении аномальных наблюдений;
- При непосредственном прогнозировании экономических показателей и прогнозирования изменения тренда.

#### Методы сглаживания

- Аналитические методы
- Методы механического сглаживания:
  - Простой скользящей средней
  - Взвешенной скользящей средней
  - Экспоненциального сглаживания

1.Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

### Процедуры: 4) Расчет показателей динамики экономических процессов

1.Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

Показатели:

- Роста
- Прироста
- Автокорреляции

$$r(\tau) = \frac{(n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{\left[ (n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-\tau} y_t \right)^2 \right] \left[ (n - \tau) \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - \left( \sum_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau} \right)^2 \right]}}$$

где  $\tau$  - длина временного смещения(лаг).

|         |                                                 |                                                          |                                                |
|---------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| Среднии | $\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n - 1}$ | $\overline{T} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%$ | $\overline{T}_{np} = \overline{T} \cdot 100\%$ |
|---------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------|

## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

- 1.Предвари-  
тельный  
анализ  
данных
2. Построени  
е  
моделей  
временных  
рядов
3. Оценка  
качества  
моделей
4. Построени  
е  
точечного и  
интерваль-  
ного  
прогнозов

| Тип задачи               | Применяемый метод               |
|--------------------------|---------------------------------|
| Анализ                   | Моделирование кривых роста      |
| Моделирование            | Адаптивные методы моделирования |
| Причинных взаимодействий | Регрессионное моделирование     |

# Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

- 1.Предварительный анализ данных
2. Построение моделей временных рядов
3. Оценка качества моделей
4. Построение точечного и интервального прогнозов

## Кривые роста:

| Тип процесса                        | Функция                                                           |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Без предела роста                   | - прямая<br>- парабола<br>- экспонента и др.                      |
| С пределом роста без точки перегиба | -кривая Джонсона<br>-модифицированная экспонента и др.            |
| С пределом роста и точкой перегиба  | - логистическая кривая (кривая Перла – Риды)<br>- Кривая Гомперца |

### Адаптивные модели прогнозирования

Цель адаптивного метода:

- в построении самокорректирующихся экономико-математических моделей

1. Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

1. Предварительный анализ данных

2. Построение моделей временных рядов

3. Оценка качества моделей

4. Построение точечного и интервального прогнозов

### I. Адекватность

- 1) Проверка равенства математического ожидания уровней ряда нулю (t-статистика);
- 2) Проверка случайности возникновения отдельных отклонений от тренда;
- 3) Проверка условия независимости (автокорреляции);
- 4) Соответствия ряда остатков нормальному закону распределения.

### II. Точность

- 1) Среднеквадратическое отклонение;
- 2) Максимальная по абсолютной величине ошибка;
- 3) Относительная максимальная ошибка;
- 4) Средняя по модулю ошибка;
- 5) Средняя по модулю относительная ошибка

|                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------|
| 1.Предвари-<br>тельный<br>анализ<br>данных                             |
| 2.<br>Построени<br>е<br>моделей<br>временных<br>рядов                  |
| 3. Оценка<br>качества<br>моделей                                       |
| 4.<br>Построени<br>е<br>точечного и<br>интерваль-<br>ного<br>прогнозов |

Критерии оценки

I. Адекватность

- 1) Проверка равенства математического ожидания уровней ряда нулю (t-статистика);
- 2) Проверка случайности возникновения отдельных отклонений от тренда;
- 3) Проверка условия независимости (автокорреляции);
- 4) Соответствия ряда остатков нормальному закону распределения.

$$t_{расч} = \frac{|\bar{e}|}{S} \sqrt{n}$$
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (e_t - \bar{e})^2}$$

- Критерий «восходящих» и «нисходящих»серий;
- Критерий «пиков».

- Рассчитываются Коэффициенты:
- Асимметрии
  - Экссесса



## Вопрос 2. Этапы построения прогноза по временным рядам

|                                                   |
|---------------------------------------------------|
| 1.Предварительный анализ данных                   |
| 2. Построение моделей временных рядов             |
| 3. Оценка качества моделей                        |
| 4. Построение точечного и интервального прогнозов |

- Прогнозирование методом экстраполяции базируется на предположениях:
  - а) развитие исследуемого явления в целом описывается плавной кривой;
  - б) общая тенденция развития явления в прошлом и настоящем не указывает на серьезные изменения в будущем;
  - в) учет случайности позволяет оценить вероятность отклонения от закономерного развития.

**Точечный прогноз** получается подстановкой в модель значения фактора – времени.

**Интервальный прогноз** строиться на основе точечных прогнозов.

Доверительный интервал – интервал, относительно которого можно с заранее выбранной вероятностью сказать, что он содержит значение прогнозируемого показателя.



**Адаптивные модели прогнозирования –**  
это модели дисконтирования данных.

**Адаптивные модели способны**  
быстро приспосабливать свою структуру и параметры к  
изменению условий.

### **Схемы адаптивного моделирования**

- Скользящего среднего (СС-модели)
  - Метод Брауна(основан на экспоненциальном сглаживании):
    - Модели Брауна – нулевой порядок (не имеет тенденции);
      - первого порядка (линейные тенденции);
      - второго порядка (параболические тенденции)
  - Метод Хольта:
- Авторегрессии (АР-модели)

## Общая схема построения адаптивных модели

1. По нескольким первым наблюдениям ряда оцениваются значения параметров модели.
2. По имеющейся модели дается прогноз на один шаг.
3. По модели со скорректированными параметрами рассчитывается прогнозная оценка на следующий момент времени, и весь процесс повторяется до исчерпывания фактических членов.
4. Прогнозирование на будущее осуществляется с использованием параметров, определенных на последнем шаге по последним фактическим наблюдениям ряда.

### Сезонные колебания -

- это регулярные, периодические внутригодовые подъемы и спады производства, деловой активности, грузооборота, товарооборота и прочего, связанные со сменой времен года.

### Сезонность -

- ограниченность годового периода под влиянием этого фактора.

### Тренд-сезонный временной ряд

- временной ряд, в котором наблюдаются и тренд и сезонные колебания

### Этапы

1. Определяется наличие тренда
2. Определяется наличие сезонных колебаний
3. Фильтрация компонент тренд-сезонного временного ряда
4. Составить прогноз тренд-сезонного экономического процесса

### Этапы

1. Определяется наличие тренда

2. Определяется наличие сезонных колебаний

3. Фильтрация компонент тренд-сезонного временного ряда

4. Составить прогноз тренд-сезонного экономического процесса

### Методы

- Визуальные
- Аналитические



## Вопрос 4. Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям

### Этапы

1. Определяется наличие тренда

**2. Определяется наличие сезонных колебаний**

3. Фильтрация компонент тренд-сезонного временного ряда

4. Составить прогноз тренд-сезонного экономического процесса

### Критерии

- Дисперсионный
- Гармонический
- Основанный на сравнении распределения коэффициента автокорреляции с распределением циклического коэффициента автокорреляции.

Проверка сводится к проверке на случайность остаточной компоненты, остающейся после выделения временного тренда.

## Вопрос 4. Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям

### Этапы

1. Определяется наличие тренда

2. Определяется наличие сезонных колебаний

**3. Фильтрация компонент тренд-сезонного временного ряда**

4. Составить прогноз тренд-сезонного экономического процесса

### Методы

- Регрессионные;
- Спектральные;
- Итерационные:
  - Адаптивное соотношение – если с течением времени сезонная составляющая существенно не меняется ;
  - Мультипликативное соотношение – если сезонная составляющая из года в год возрастает или снижается.

**Вопрос 4. Моделирование экономических процессов, подверженных сезонным колебаниям**

|                                                                |
|----------------------------------------------------------------|
| <b>Этапы</b>                                                   |
| 1. Определяется наличие тренда                                 |
| 2. Определяется наличие сезонных колебаний                     |
| <b>3. Фильтрация компонент тренд-сезонного временного ряда</b> |
| 4. Составить прогноз тренд-сезонного экономического процесса   |

**Алгоритм фильтрации**  
(предположение об аддитивной зависимости)

1. Сглаживаем исходный временной ряд методом центрированной скользящей средней, используя весовые коэффициента.  
Получаем временной ряд – предварительное значение тренда.
2. Из исходного временного ряда вычитаем сглаженные значения.  
Полученный ряд содержит сезонную и случайную компоненты.
3. Усредняем полученные значения за все года по каждому месяцу (кварталу).
4. Корректируем среднее значение (на среднее значение усредненного ряда).
5. Проводим десезонализацию исходных данных.
6. Подбираем кривую роста, аппроксимирующую тренд
7. Определяем значения остаточной компоненты.

### Модели авторегрессии

- Свойство временных рядов – зависимость уровней одного и того же ряда от другого.
- Авторегрессионный процесс - это процесс, при котором каждое значение временного ряда находится в линейной зависимости от предыдущих значений.
- Авторегрессионный процесс первого порядка – текущее значение зависит от одного предыдущего значения.
- Авторегрессионный процесс второго порядка – от двух и т.д.
- **Авторегрессионная модель** – это модель в которой моделируемые значения являются линейной функцией от предыдущих наблюдений.



### Разновидность авторегрессионных моделей

- модели скользящей средней
- Комбинированные модели (сочетающие авторегрессионный процесс с моделью скользящей средней или к ним ещё добавляется процедура интегрирования).

#### Порядок процедур:

1. Вычисляем для исходного ряда разности первого и второго порядка и строим графики. Если  $\text{trасч} < \text{табл}$ , то ряд стационарный.
2. Определяем автокорреляцию для каждого ряда и значимость.
3. Определяем дисперсию исходного ряда и разностных рядов.
4. Составляем модель.
5. Определяем стационарность (по критерию Дики-Фуллера)