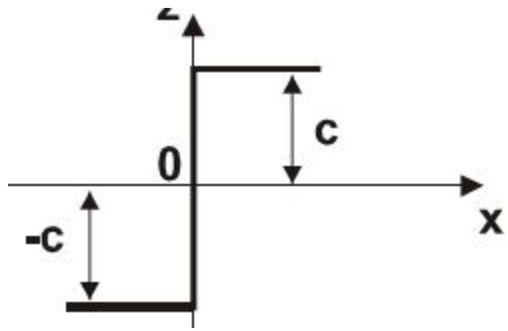
Нелинейные системы автоматического управления

- Нелинейной системой автоматического управления называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено описываемое нелинейным уравнением

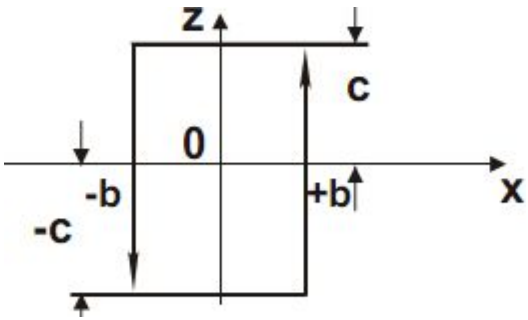
Виды нелинейных звеньев:

- звенья релейного типа
  - идеальное реле



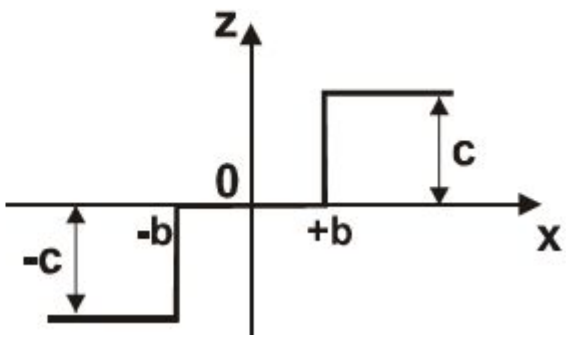
$$z=\begin{cases} c, & x\ge 0\\ -c, & x<0\end{cases}$$

  - реле с гистерезисом



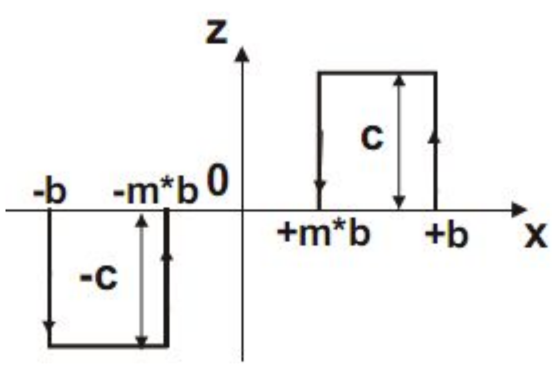
$$z=\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} c, & x\ge b\\ -c, & x<b\end{array}\right] & \dot{x}>0\\ \left.\begin{array}{ll} c, & x>-b\\ -c, & x\le -b\end{array}\right] & \dot{x}<0\end{cases}$$

- идеальное реле с зоной нечувствительности



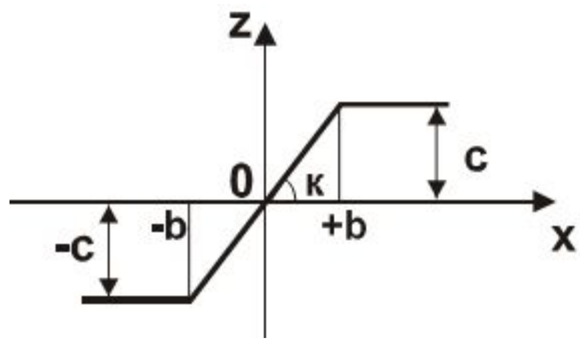
$$z = \begin{cases} c, & x > b \\ 0, & -b \le x \le b \\ -c, & x < b \end{cases}$$

- реальное реле с зоной нечувствительности

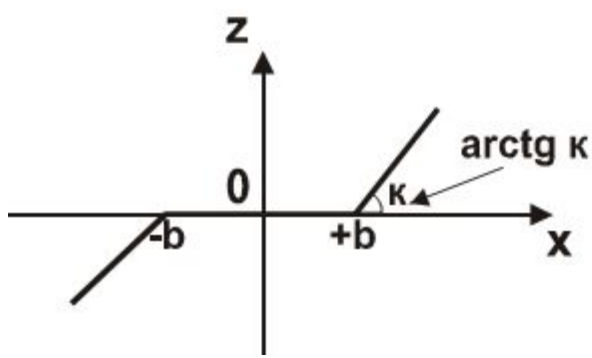


звено с кусочно-линейной характеристикой

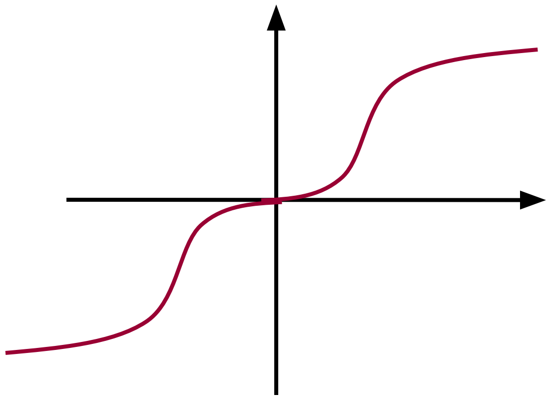
- усилитель с ограничением



- усилитель с зоной нечувствительности



- звено с криволинейной характеристикой

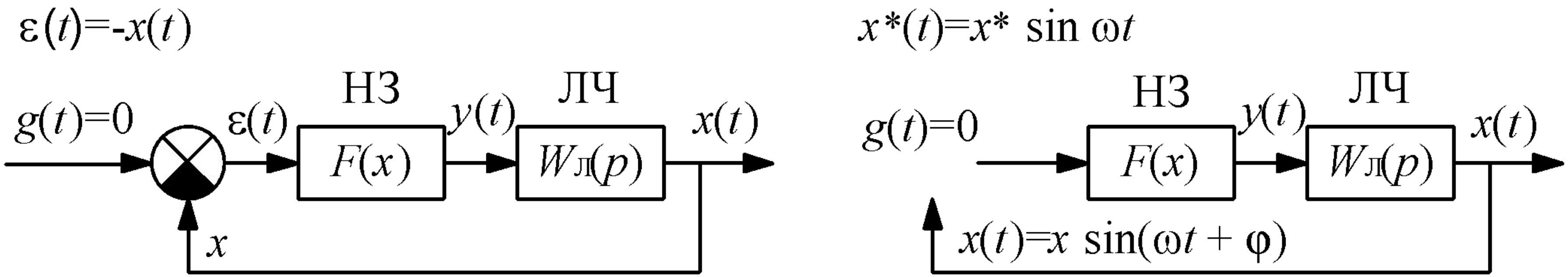


- звено, уравнение которого содержит произведение переменных или их производных
- логическое звено

Метод гармонической линеаризации

- относится к приближенным методам
- прост и универсален
- широко распространен в инженерной практике

Идея метода гармонической линеаризации. Условия применимости



Предполагается

- в системе автоколебания с амплитудой a_k и частотой ω_k.
- Сигнал на входе НЗ $\quad x^*(t) = x^* \sin \omega t$
- Сигнал на выходе НЗ

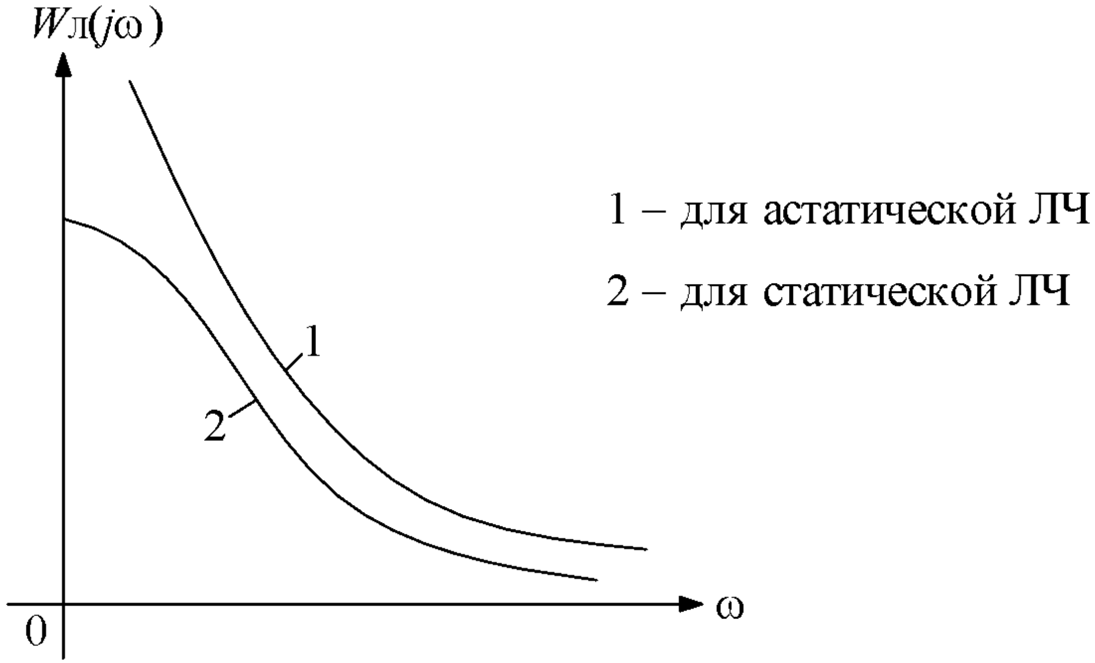
$$y(t) = \frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \sin(k\psi + \varphi_k), \qquad \psi = \omega t,$$

предполагается,

- что сигнал $y(t)$, пройдя через линейную часть $W_{л}(j\omega)$, фильтруется ею в такой степени, что в сигнале на $x(t)$ на выходе линейной части можно пренебречь высшими гармониками $x_2(t)$, $x_3(t)$…и считать, что

$$x(t) \approx x_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Это предположение называется **гипотезой фильтра**.



$$\frac{y_k}{y_1} \cdot \frac{\left|W_Л(jk\omega)\right|}{\left|W_Л(j\omega)\right|} << 1$$

$$x^*(t) + x(t) = 0 \qquad (1)$$

$$0 - x(t) = \varepsilon(t) \qquad (2)$$

$$x^*(t) = \varepsilon(t) \qquad (3)$$

$x^* = x_1$ - уравнение баланса амплитуд

$\varphi = \pi$ - уравнение баланса фаз гармонических колебаний

уравнения гармонического баланса

Решаются две группы задач:

- исследование периодических движений в нелинейных замкнутых системах (определение условий устойчивости и параметров ПД);
- исследование условий отсутствия моногармонических автоколебаний в нелинейных замкнутых системах.

Гармоническая линеаризация нелинейностей

Пусть заданная нелинейная функция

$$y = F(x)$$

- При выполнении гипотезы фильтра переменная x(t) = a·sinωt = sinψ.
- Разложим периодический сигнал на выходе НЗ в ряд Фурье:

$$y = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \sin\psi + B_1 \cos\psi + A_2 \sin 2\psi + B_2 \cos 2\psi + \ldots$$

$$y = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \sin\psi + B_1 \cos\psi + A_2 \sin 2\psi + B_2 \cos 2\psi + \dots$$

Предполагаем

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin\psi)d\psi = 0 \qquad \sin\psi = \frac{x}{a} \qquad \cos\psi = \frac{px}{a\omega}$$

где $p=d/dt$

$$y = q(a)x + \frac{q'(a)}{\omega}px$$

где $q(a)$ и $q'(a)$ – коэффициенты гармонической линеаризации

$$\left.\begin{aligned} q(a) &= \frac{A_1}{a} = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2\pi}[F(a\cdot\sin\psi)\sin\psi]d\psi, \\ q'(a) &= \frac{B_1}{a} = \frac{1}{a\pi}\int_0^{2\pi}[F(a\cdot\sin\psi)\cos\psi]d\psi \end{aligned}\right\}$$

- Для однозначной нелинейной характеристики $F(x)$ коэффициент $q'(a)=0$.
- Для неоднозначной характеристики типа гистерезис $q'(a)\neq0$ и $q'(a)<0$

- Замена исходного нелинейного уравнения приближенным уравнением для первой гармоники называется гармонической линеаризацией

$$W_H(a,\omega) = \frac{y}{x} = q(a) + \frac{q'(a)}{\omega} p$$

передаточной функцией нелинейного гармонически линеаризованного звена

Исследование устойчивости периодических движений методом гармонической линеаризации

Запишем уравнение замкнутой гармонически линеаризованной нелинейной САУ в операторной форме:

$$\begin{cases} X(s) = -W_{Л}(s)Y(s) \\ Y(s) = W_{Н}X(s) \end{cases}$$

$W_{Л}(s) = \dfrac{R(s)}{Q(s)}$ - передаточная функция линейной части, $n[R(s)] \le m[Q(s)]$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной нелинейной САУ:

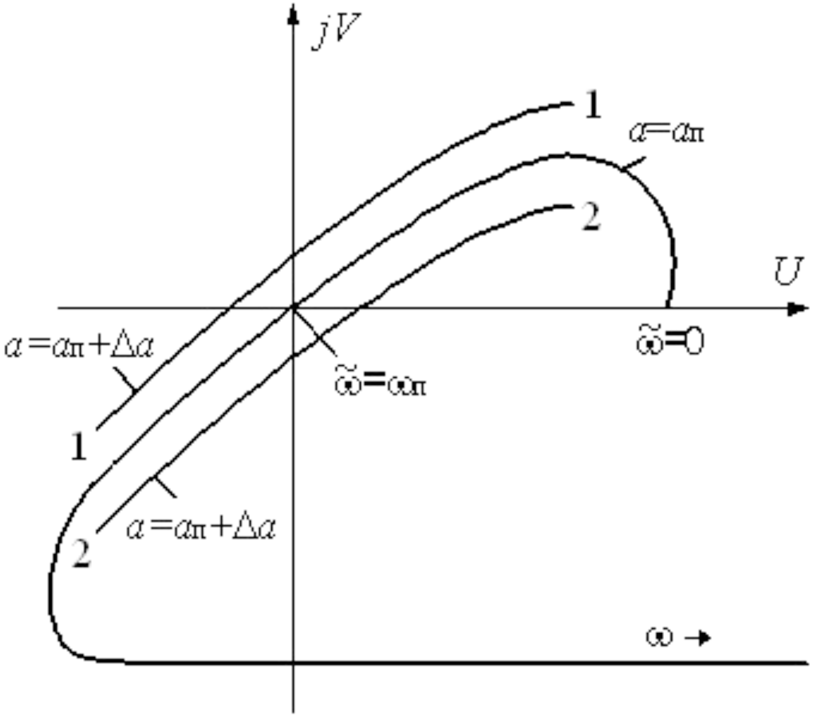
$$L(s) = Q(s) + R(s)(q + \frac{q'}{\omega} s) = 0$$

- подставим в $L(s)$ $s = j\omega_п$
- выделим вещественную $U(a_п, \omega_п,)$ и мнимую $V(a_п, \omega_п)$ части.
- по критерию Михайлова

$$\left. \begin{aligned} U(a_п, \omega_п) &= 0, \\ M(a_п, \omega_п) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left.\begin{aligned} U(a_{п}, \omega_{п}) = 0, \\ M(a_{п}, \omega_{п}) = 0. \end{aligned}\right\}$$

- определяются параметры ПД $a_{п}$ и $\omega_{п}$.



- Если при положительном приращении амплитуды $\Delta a>0$ кривая Михайлова займет положение 1-1, а при отрицательном приращении амплитуды $\Delta a<0$ займет положение 2-2, то исследуемые ПД с параметрами ($a_п$,$\omega_п$) устойчивы, т.е. в НС имеют место автоколебания. В противном случае ПД – неустойчивы, а сама нелинейная САУ устойчива в малом.

Частотный метод исследования устойчивости ПД в НС Л. С. Голдфарба (1946 г.)

Основная идея

$$\boxed{1 + W_Н(a) \cdot W_Л(s) = 0} \qquad (4)$$

$W_Н(a)$ − комплексный коэффициент передачи НЭ

$$W_H(a,\omega) = q(a) + jq'(a) = \left|W_H(a)\right| e^{j\varphi_H(a)}$$

$$|W_H(a,\omega)| = \sqrt{[q(a)]^2 + [q'(a)]^2}, \quad \varphi_H(\mathrm{a}) = \operatorname{arctg}\frac{q'(a)}{q(a)}$$

$$s = j\omega$$

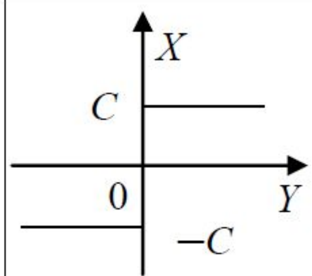
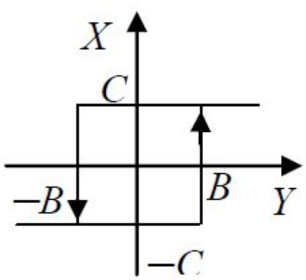
решим полученное уравнение относительно неизвестных $a_п$ и $\omega_п$.

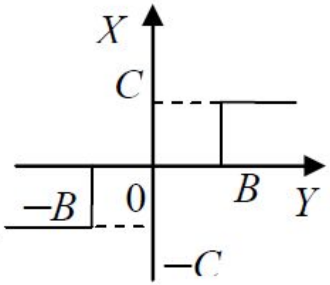
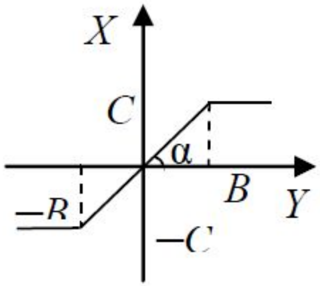
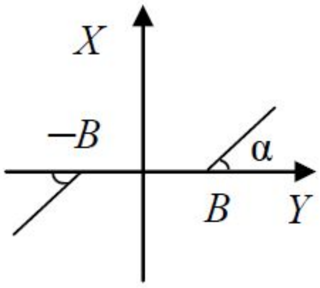
Графоаналитическое решение

$$W_Л(j\omega) = -\frac{1}{W_H(a)} = Z_H(a)$$

$Z_H(a) = -\dfrac{1}{W_H(a)}$ - инверсный коэффициент гармонической линеаризации

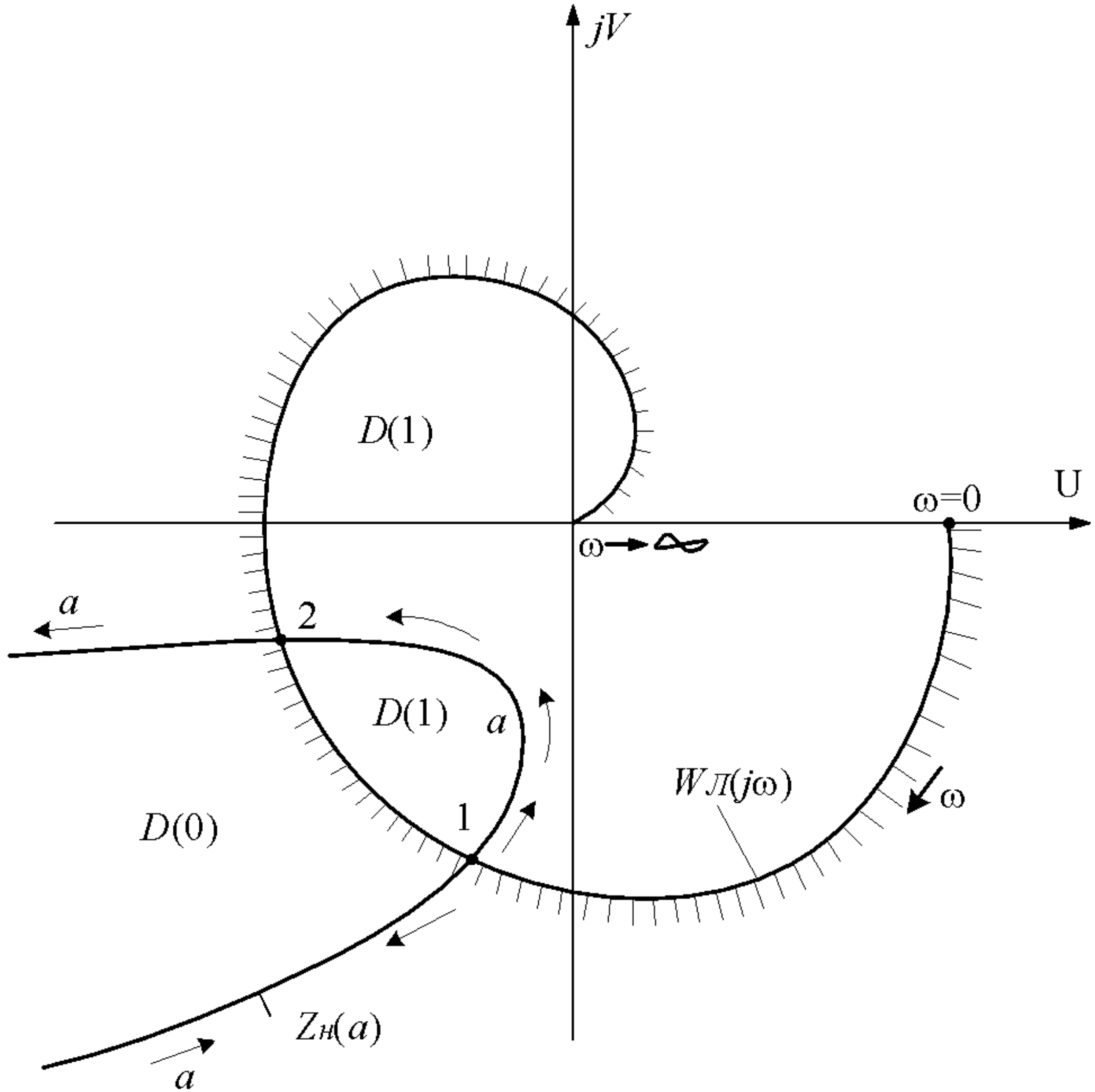
Коэффициенты гармонической линеаризации типовых нелинейных звеньев

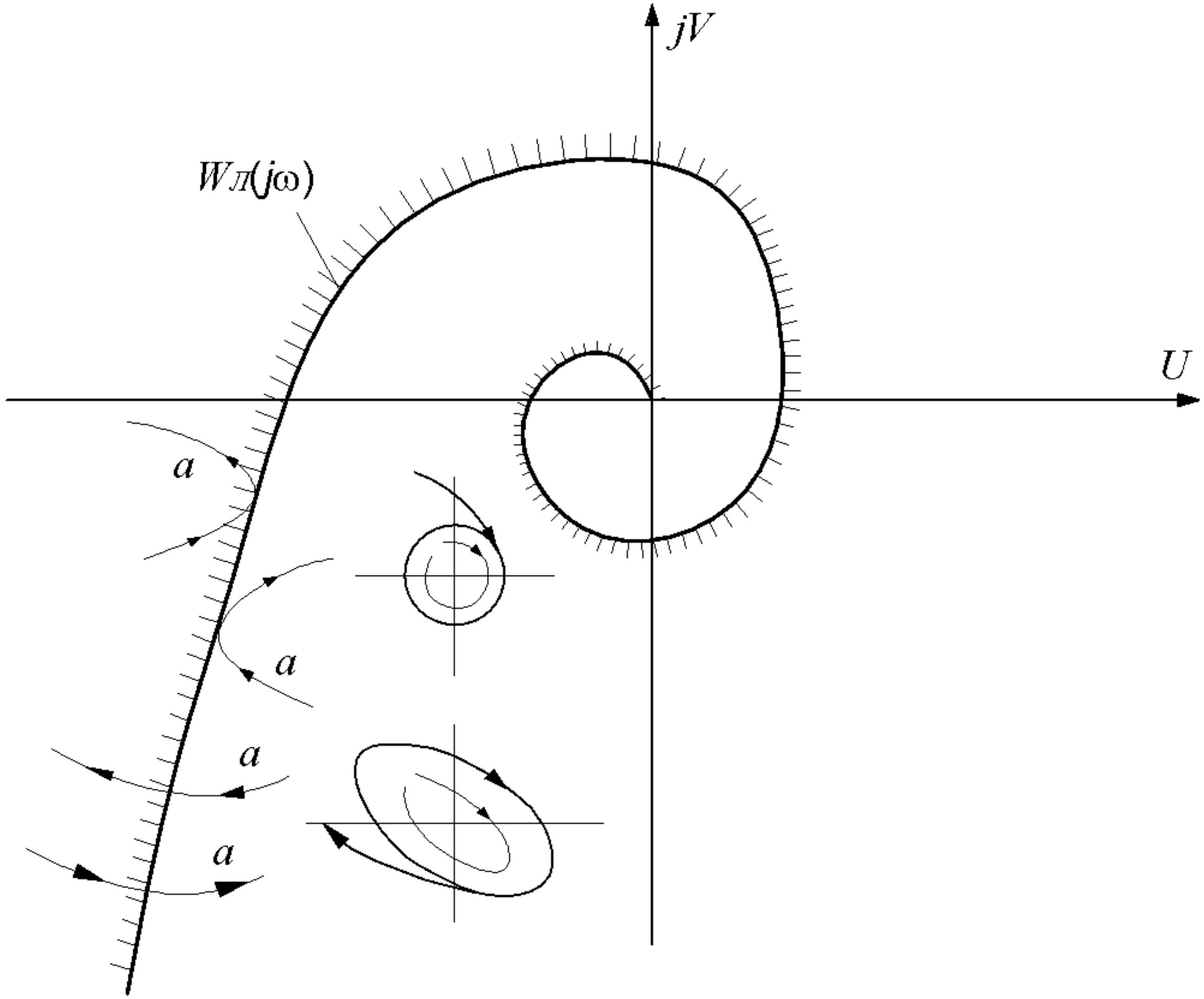
№ пп	Статическая характеристика	Название звена и уравнение	Выражения для коэффициентов гармонической линеаризации: q	Выражения для коэффициентов гармонической линеаризации: q'
1		Идеальное двухпозиционное реле $X=\begin{cases} C \text{ при } Y>0 \\ -C \text{ при } Y<0 \end{cases}$	$\dfrac{4C}{\pi A}$	0
2		Двухпозиционное реле с зоной нечувствительности $X=\left.\begin{cases} C \text{ при } Y>B \\ -C \text{ при } Y<B \end{cases}\right\} Y>0$ $X=\left.\begin{cases} C \text{ при } Y>-B \\ -C \text{ при } Y<-B \end{cases}\right\} Y<0$	$\dfrac{4C}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{B^2}{A^2}}$ при $A\ge B$	$\dfrac{4CB}{\pi A^2}$ при $A\ge B$

3		Идеальное трехпозиционное реле $$X = \begin{cases} C \text{ при } Y > B \\ 0 \text{ при } \lvert Y \rvert \le B \\ -C \text{ при } Y < 0 \end{cases}$$	$\frac{4C}{\pi A}\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}$ при $A \ge B$	0
4		Усилитель с насыщением $$X = \begin{cases} KY \text{ при } \lvert Y \rvert \le B \\ C \text{ при } Y > B \\ -C \text{ при } Y < -B \end{cases}$$ $K = tg\alpha$	$\frac{2K}{\pi}\left(\mathrm{arsin}\frac{B}{A} + \frac{B}{A}\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right)$ при $A \ge B$	0
5		Усилитель с зоной нечувствительности $$X = \begin{cases} K\ (Y - B \text{ при } Y > B \\ 0 \quad \text{ при } \lvert Y \rvert \le B \\ K\ (Y + B \text{ при } X > -B \end{cases}$$ $K = \mathrm{tg}\ \alpha$	$K - \frac{2K}{\pi}\left(\mathrm{arsin}\frac{B}{A} + \frac{B}{A}\sqrt{1-\frac{B^2}{A^2}}\right)$ при $A \ge B$	0

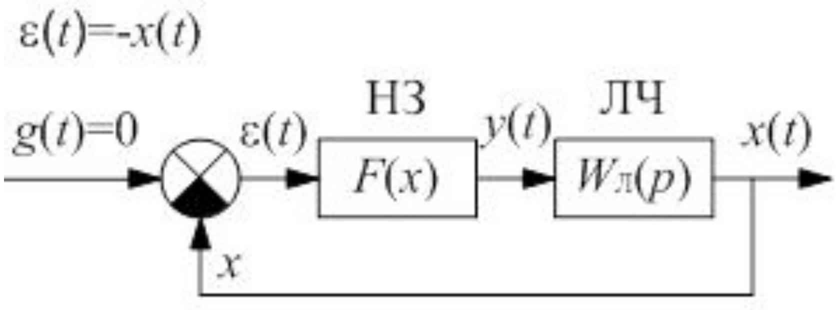
- Оба годографа и строятся на одной комплексной плоскости.
- $W_{Л}(j\omega)$ - АФХ линейной части определяет частоту $\omega_п$ ПД,
- $Z_H(a)$ - амплитуду $a_п$ ПД.

- *ПД – устойчивы, если, двигаясь по характеристике в сторону возрастания амплитуды, переходим из неустойчивой в устойчивую область D-разбиения при устойчивой линейной части .*


jV
D(1)
U
ω=0
ω→∞
a
2
D(1)
a
WЛ(jω)
ω
D(0)
1
Zн(a)
a

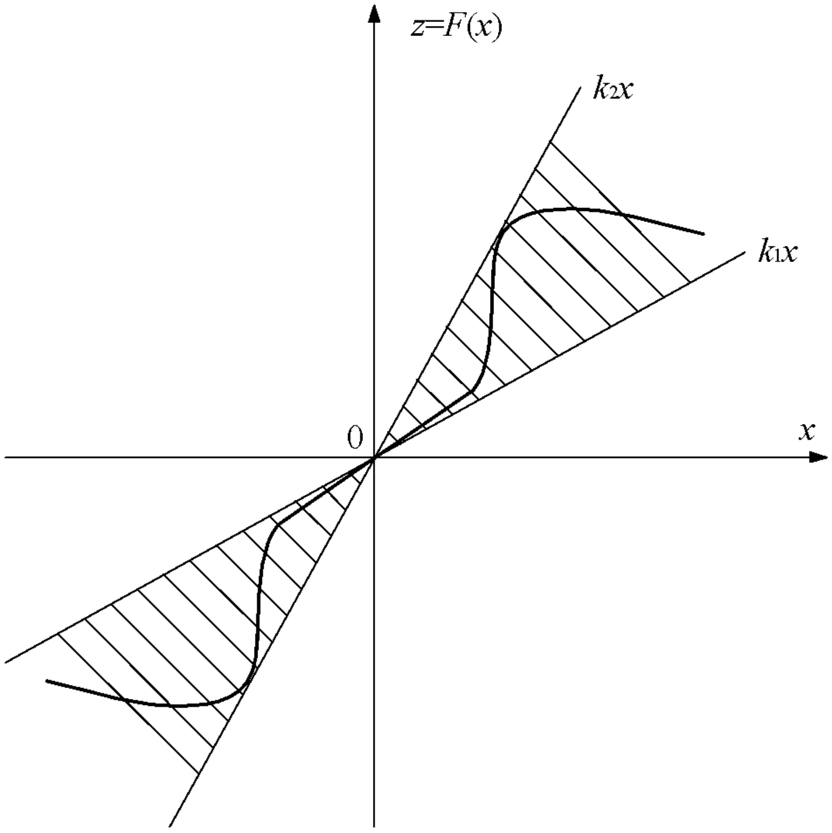

jV
U
Wл(jω)
a
a
a
a

Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова



$$z = F(x)$$

расположенные внутри угла, образованного прямыми



$$z = k_1 x \quad z = k_2 x$$

$$(0 < k_1 < k_2)$$

$$z = hx \qquad k_1 < h < k_2$$

$$0 \le \frac{F(x)}{x} \le K \qquad K_1 = 0$$

- линейная часть системы устойчива $W_Л(s)$

Абсолютная устойчивость нелинейной САУ предложена в 1959 г. в работе румынского математика В. М. Попова.

Теорема. Если замкнутая система состоит из устойчивой линейной части с передаточной функцией, все полюсы которой располагаются в левой полуплоскости, и нелинейного элемента с характеристикой $z = F(x)$, лежащей в угле $0 \le F(x)/x \le K$, то достаточным условием этой системы является выполнение при всех $\omega \ge 0$ неравенства

$$\boxed{\operatorname{Re}\left[(1 + jq\omega)\cdot W_{\text{Л}}(j\omega) + \frac{1}{k}\right] > 0} \qquad (1)$$

где *q* – произвольное вещественное число

Геометрическая интерпретация теоремы.

введем видоизмененную частотную характеристику $W^*(j\omega)$

$$\operatorname{Re}W^*(j\omega) = \operatorname{Re}W_Л(j\omega) \qquad \operatorname{Im}W^*(j\omega) = \omega\operatorname{Im}W_Л(j\omega)$$

обозначим

$$\operatorname{Re}W^*(j\omega) = U^*(\omega) \quad \operatorname{Im}W^*(j\omega) = V^*(\omega)$$

$$\boxed{\operatorname{Re}\left[(1+jq\omega)\cdot W_Л(j\omega)+\frac{1}{K}\right] = \operatorname{Re}W_Л(j\omega) - q\omega\cdot\operatorname{Im}W_Л(j\omega)+\frac{1}{K} > 0} \quad (2)$$

(3)

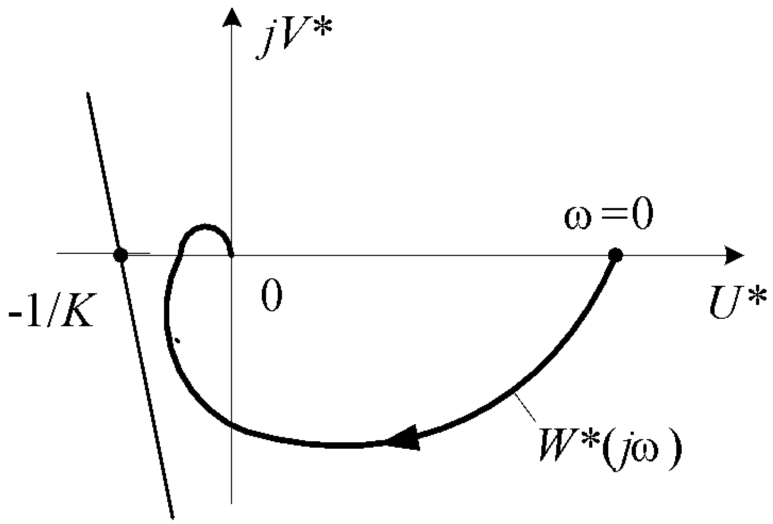
$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) + \frac{1}{K} > 0$$

(4)

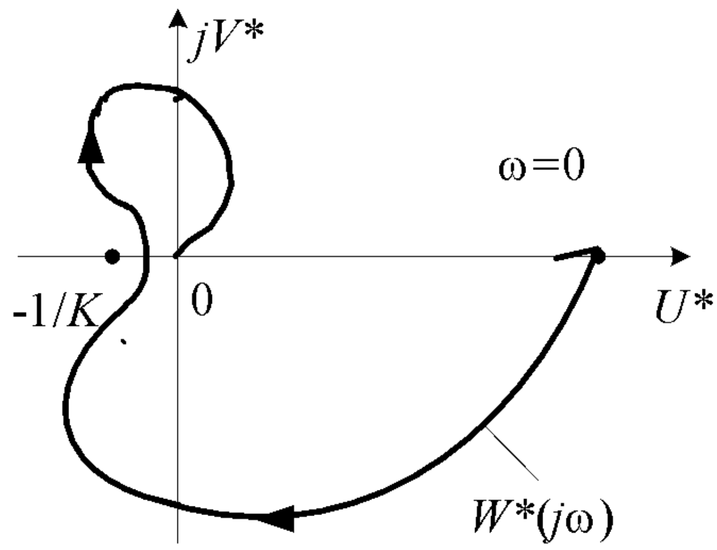
$$U^*(\omega) - qV^*(\omega) + \frac{1}{K} = 0$$

(4) определяет собой прямую линию на плоскости $W^*(j\omega)$, которая проходит через точку с координатами $(-\frac{1}{K}, j0)$ с угловым коэффициентом, равным $\frac{1}{q}$.

Теорема. САУ будет абсолютно устойчива, если на плоскости видоизмененной частотной характеристики $W^*(j\omega)$ линейной части системы можно провести прямую через точку так, чтобы $W^*(j\omega)$ располагалась справа от этой прямой. Указанную прямую принято называть прямой Попова.



jV*
ω=0
-1/K
0
U*
W*(jω)



jV*
ω=0
-1/K
0
U*
W*(jω)

Второй метод Ляпунова

- не требует нахождения решения дифференциального уравнения

основная идея

замена анализа решений нелинейных уравнений произвольного порядка на оценку свойств этих решений с помощью дифференциального неравенства

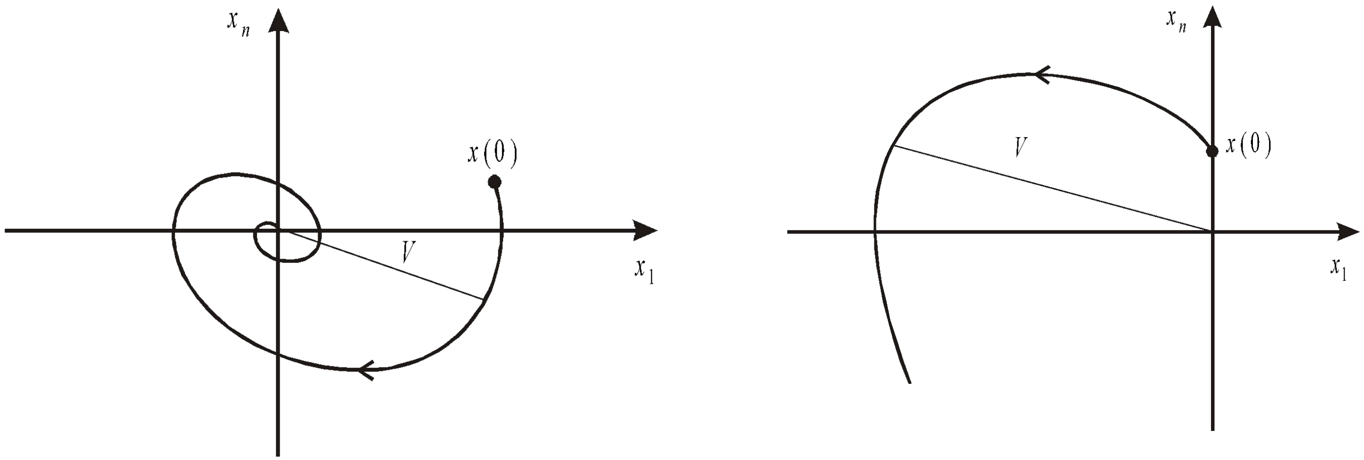
- исследуется изменение «расстояния» в пространстве состояний от текущей точки системы до начала координат
- В качестве оценки расстояния можно использовать скалярную функцию, которую обозначим через *V*(*x*)
- фазовые траектории системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \quad f(0) = 0$$

- устойчивое состояние равновесия - «стягиваются»

- Суть второго метода Ляпунова сводится к оценке изменения некоторой функции координат состояния системы вдоль траекторий движения

$V(x)$ - называют *функцией Ляпунова*.



а *б*

Рис. 1. Изменение функции V в случае устойчивой (*а*) и неустойчивой (*б*) систем

Функция $V(x)$ называется ***положительно определенной*** в области D, если выполняются свойства

$$\begin{cases} V(x) > 0 \quad \forall x \in D, \\ V(0) = 0. \end{cases}$$

Полной производной функции Ляпунова в силу системы называется функция $V(x)$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x^T}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x^T} f(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^T} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]$$ – вектор-строка частных производных.

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x)$$ в развернутой форме

Теоремы второго метода Ляпунова

Состояние равновесия системы является асимптотически устойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова V(x) ее полная производная в силу системы есть отрицательно определенная функция, т. е. при выполнении условий

$$\begin{cases} V(x) > 0 \quad \forall \ x \neq 0, \quad V(0) = 0, \\ \dot{V}(x) < 0 \quad \forall \ x \neq 0, \quad \dot{V}(0) = 0. \end{cases}$$

Теорема о неустойчивости

Состояние равновесия системы является неустойчивым, если для положительно определенной функции Ляпунова V(x) ее полная производная в силу системы представляет собой также положительно определенную функцию.

- теоремы дают только достаточные условия устойчивости и неустойчивости

Пример

с помощью второго метода Ляпунова оценить устойчивость системы, поведение которой описывают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2 + u. \end{cases}$$

Полагаем $u = 0$ и рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5x_2. \end{cases}$$

Выберем для нее в качестве функции Ляпунова следующую функцию:

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0,$$
$$V(0) = 0.$$

- Определим теперь полную производную функции Ляпунова вдоль траектории движения автономной системы

$$\dot{V}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 10x_2^2 = -10x_2^2$$

- обращается в нуль не только в начале координат, но и на всей оси .

$$V(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad V(0) = 0,$$

$$\dot{V}(x) = 2(x_1 + x_2)\dot{x}_1 + 2(x_1 + x_2)\dot{x}_2$$

$$\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 10x_1x_2 - 8x_2^2$$

- полная производная новой функции Ляпунова есть отрицательно определенная функция.
- Следовательно, исходная система является асимптотически устойчивой.