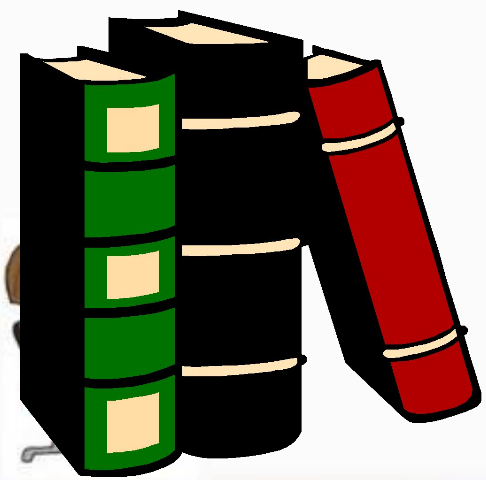
Понятие предела функции в точке

Основные вопросы:

- *Определение предела функции в точке, бесконечно малой и бесконечно большой функции в точке. Связь между б/малыми и б/большими функциями в точке.*
- *Основные теоремы о пределах функций (суммы, произведения и частного).*

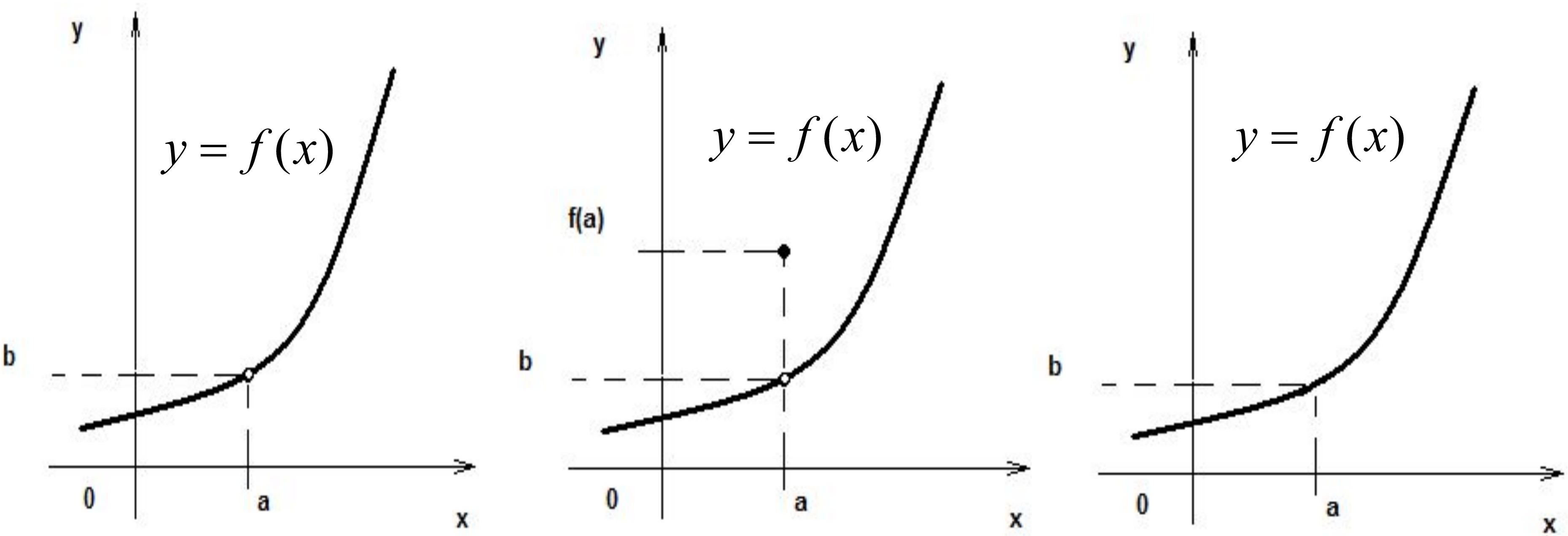
Предел функции

Предел – *одно из основных понятий математического анализа.* Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.



РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

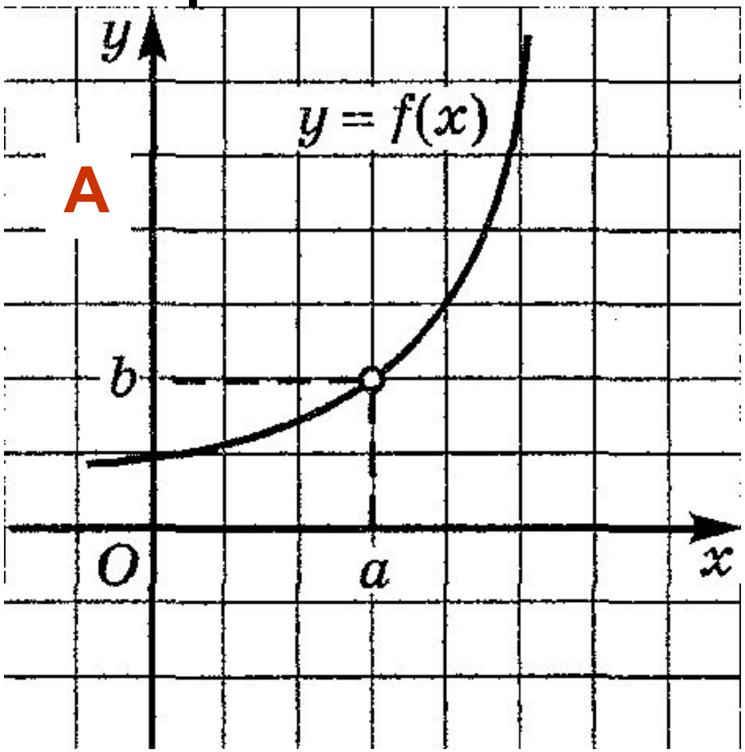
Рассмотрим функции, графики которых изображены на следующих рисунках:



Во всех трех случаях изображена одна и та же кривая, но все же изображают они три разные функции, отличающиеся друг от друга своим поведением в точке $x = a$.

Рассмотрим каждый из этих графиков подробнее:

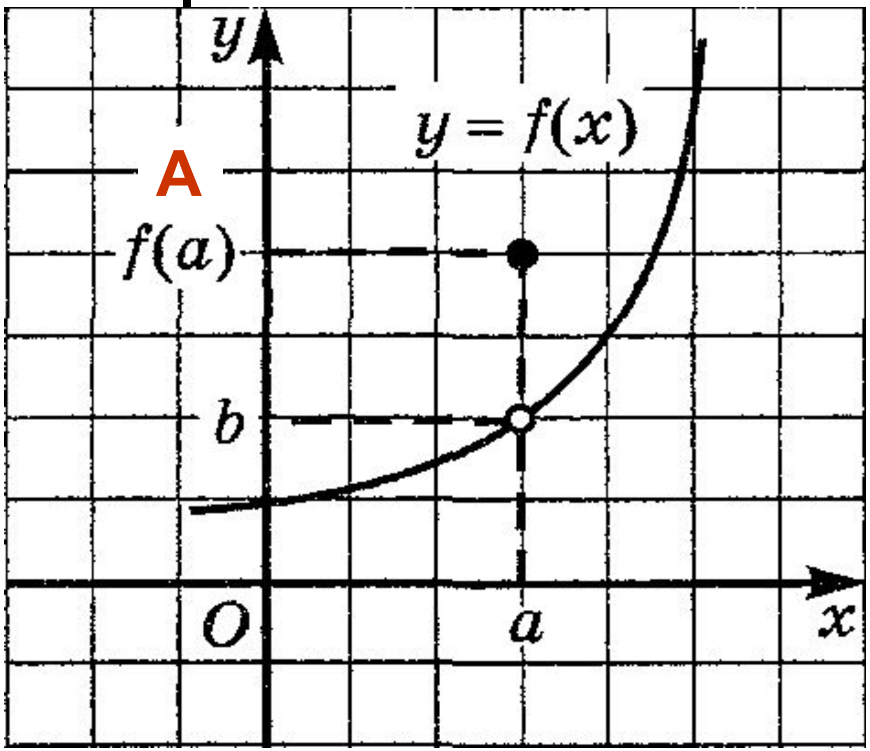
Случай 1.



$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$f(a)$ – не существует

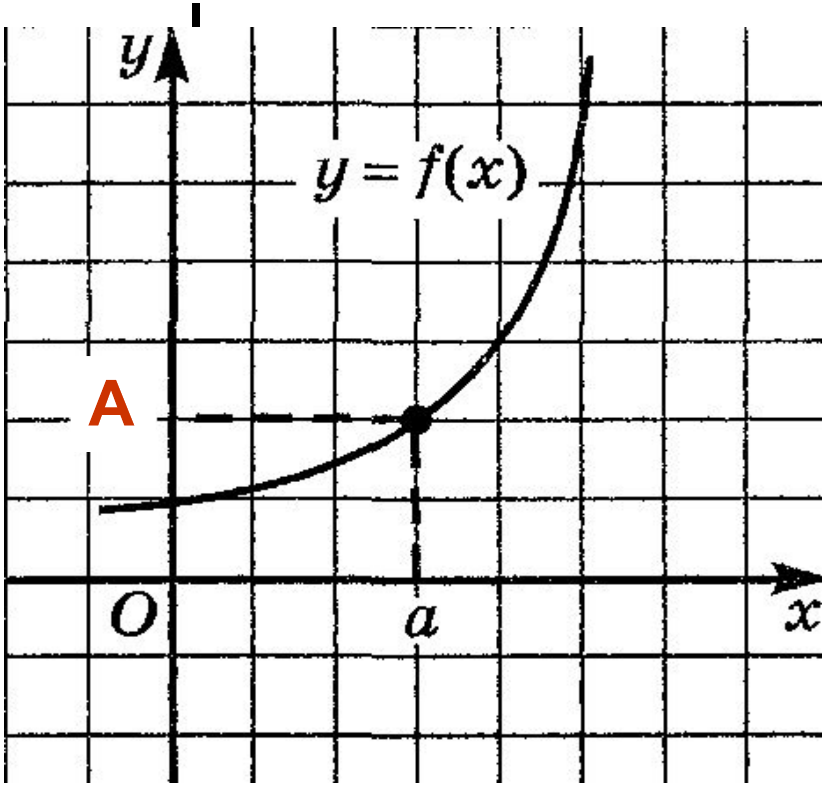
Случай 2.



$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$f(a) \neq A$$

Случай 3.



$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$f(a) = \mathrm{A}$$

В этом случае говорят, что функция непрерывна в точке a

Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

которую читают: «предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен b ».

Содержательный смысл этой фразы следующий: *если значения аргумента выбирать все ближе и ближе к значению $x = a$, то значения функции все меньше и меньше отличаются от предельного значения b.*

Или можно сказать так: в достаточно малой окрестности точки a справедливо приближенное равенство:

$$f(x) \approx a$$

При этом сама точка $x = a$ исключается из рассмотрения.

Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может самой точки x_0.

Число A называют пределом функции в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех x из δ – окрестности точки x_0 справедливо неравенство:

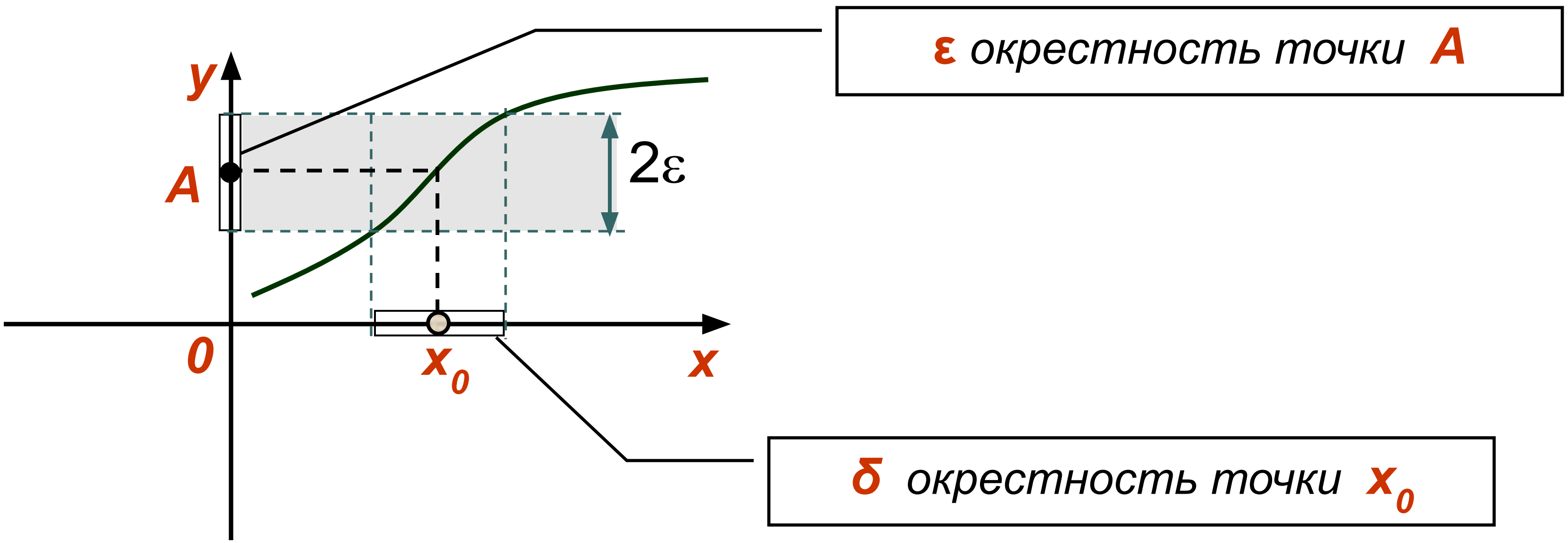
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0; \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Предел функции в точке

$$\forall\varepsilon > 0;\ \exists\delta > 0;\ \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



Геометрический смысл предела: для всех ***x*** из ***δ*** – окрестности точки x_0 точки графика функции лежат внутри полосы, шириной **2ε**, ограниченной прямыми: $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$.

Прежде чем перейти к разбору решений примеров заметим, что если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке $x = a$, то в таком случае функцию называют ***непрерывной***.

График такой функции представляет собой сплошную линию, ***без «проколов»*** и ***«скачков»***.

Функцию $y = f(x)$ *называют* **непрерывной на промежутке** X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Примерами непрерывных функций <u>на всей числовой прямой</u> являются: $y = C$, $y = kx + b$, $y = ax^2 + by + c$, $y = |x|$, $y = x^n$, $n \in \mathrm{N}$,

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0, +\infty)$, а функция $y = x^{-n}$, $n \in \mathrm{N}$ непрерывна на промежутках

$$(-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty).$$

Предел функции в точке

Число **В** называется пределом функции в точке **а**, если для всех значений **х**, достаточно близких к **а** и отличных от **а**, значение функции $f(x)$ сколь угодно мало отличается от **В**.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Теорема.

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.

Бесконечно малая функция и бесконечно большая функция.

- Функция α (x) называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$ (здесь a – конечное число или ∞), если $$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

- Функция f(x) называется ***бесконечно большой*** функцией (или бесконечно большой величиной) при x→a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Графическая иллюстрация

- $x \to 0$ ⇒ $\dfrac{1}{x} \to \infty$

$x \to \infty$ ⇒ $y = \dfrac{1}{x} \to 0$

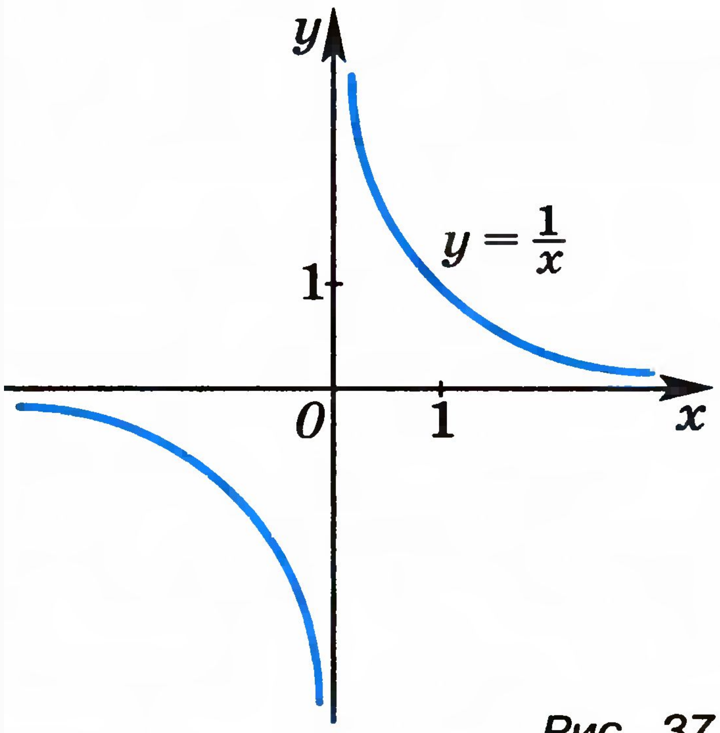


Рис. 37

Таким образом, величина, обратная бесконечно малой, есть бесконечно большая, и наоборот.

ТЕОРЕМА 1.

Предел **СУММЫ** (разности) 2-х функций равен **СУММЕ** (разности) их пределов, если последние существуют

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел **ПРОИЗВЕДЕНИЯ** 2-х функций равен **ПРОИЗВЕДЕНИЮ** их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел **ОТНОШЕНИЯ** 2-х функций равен **ОТНОШЕНИЮ** их пределов, если последние существуют и **ПРЕДЕЛ ЗНАМЕНАТЕЛЯ ОТЛИЧЕН ОТ 0**:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, если\_\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

ТЕОРЕМА 5.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

ТЕОРЕМА 6.

Предел **СТЕПЕНИ** переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \to a}(z^n) = (\lim_{x \to a} z)^n$$

Вычисление пределов

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x-1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}\overset{(0/0)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}=\infty;$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty - \infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0-0}{0-0}=\left(\frac{0}{0}\right)-$$

Раскрыть соответствующую неопределенность – это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто.

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Пример №1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}$$

Пример № 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x^2+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+2x\right)}=\frac{4*0}{3*0+2*0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(3x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3x+2}=\frac{4}{3*0+2}=2.$$

Правило № 2

- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim \ldots \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\ldots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\ldots$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенности

- При нахождении предела иногда сталкиваются с неопределенностями вида $\left(\dfrac{0}{0}\right), \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right), (\infty - \infty), (1^{\infty}), (0^{\infty}), (0^{0})(\infty^{0}).$
- Отыскание предела в таких случаях называется раскрытием неопределенности.

Для того, чтобы раскрыть неопределенность ∞/∞ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\dfrac{7}{x}}+\overset{\to 0}{\dfrac{15}{x^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{9}{x^3}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{x^4}}}{5+\overset{\to 0}{\dfrac{6}{x^2}}-\overset{\to 0}{\dfrac{3}{x^3}}-\overset{\to 0}{\dfrac{4}{x^4}}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$ Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Задание:

$$\lim_{x\to 2}(2x^2 - 3x + 4);$$

$$\lim_{x\to 0}(3x^3 + x^2 + 8x + 10);$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3}{2x-6};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9};$$

Упражнения:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+4\right)$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+5x-12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$$