

ЛЕКЦИЯ 2. ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ

2.1 Волновое уравнение и его решения

Колебательное движение в веществе

- В общем случае движение частиц вещества (атомов и молекул) *хаотично*, т.е. не существует какого-то выделенного (преимущественного) направления движения:
 - - в **твердых телах** атомы и молекулы колеблются около положений равновесия;
 - - в **жидкостях** молекулы находятся большую часть времени вблизи положения равновесия, совершая тепловые колебания, но время от времени скачкообразно перемещаются из одного такого положения в другое;
 - - в **газах** молекулы движутся поступательно, периодически изменяя направления своего движения в результате столкновений с другими молекулами

Волна

- Существует несколько способов вызвать *согласованное* колебательное движение частиц вещества.
- Именно так обстоит дело при распространении звука в различных средах.
- Например, колебания упругой мембраны громкоговорителя или голосовых связок человека порождают согласованное колебательное движение расположенных рядом с источником звука молекул воздуха. Возникают сменяющие друг друга состояния сжатия и разряжения газовой среды, которые передаются в другие области заполненного воздухом объема. Говорят, что в *воздухе распространяется звуковая (акустическая) волна*.

Упругая среда

- Будем считать среду **сплошной и непрерывной** (т.е. мельчайшие структурные частицы вещества – атомы, ионы, молекулы – расположены очень близко друг к другу; в любом элементарном объеме вещества находится огромное количество частиц, а в любой произвольно выбранной точке заполненного веществом пространства обязательно имеется частица).
- Будем также считать среду **упругой**: она оказывает сопротивлением растяжению или сжатию, и возможно – сдвигу – относительно перемещению граничащих друг с другом частей среды вдоль поверхности их соприкосновения.

Волна

- **Волна** – это процесс распространения в пространстве колебаний частиц упругой среды, при котором сами частицы совершают малые колебания около положений их равновесия и не перемещаются по всему заполненному упругой средой объему.
- Волна называется:
 - **продольной**, если направление колебаний частиц среды совпадает с направлением распространения волны (в жидкостях, газах и твердых телах);
 - **поперечной**, если частицы колеблются в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (в твердых телах).

Волновой фронт.

Волновая поверхность

- **Волновым фронтом** называется поверхность, отделяющая область пространства, вовлеченную в волновой процесс, от области, в которой колебания частиц среды еще не возникли.
- Волновой фронт – это геометрическое место точек, до которых в процессе распространения волны колебания доходят в один и тот же момент времени t .
- **Волновая поверхность** – поверхность, которая проходит через положения равновесия частиц среды, колеблющихся в одинаковой фазе.

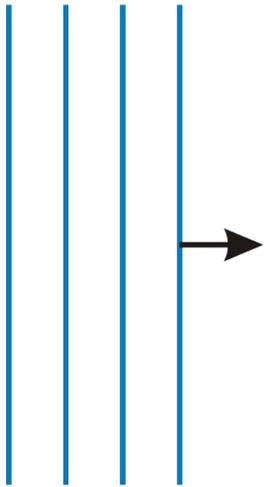
Волновой фронт и волновая поверхность: различия

- Имеются следующие различия между волновым фронтом и волновой поверхностью:
 - волновой фронт перемещается в пространстве, а волновая поверхность остается неподвижной;
 - распространяющаяся в пространстве волна в каждый момент времени имеет один единственный волновой фронт, а волновых поверхностей у каждой волны бесконечное множество;
 - волновой фронт совпадает с одной из волновых поверхностей.

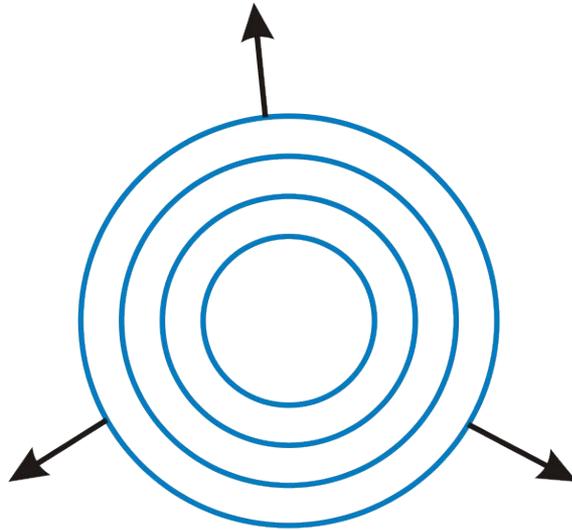
Классификация волн по виду волновой поверхности

- Волна называется **плоской**, если ее волновые поверхности представляют собой плоскости; **сферической** или **цилиндрической** – если волновые поверхности имеют сферическую или цилиндрическую форму соответственно.

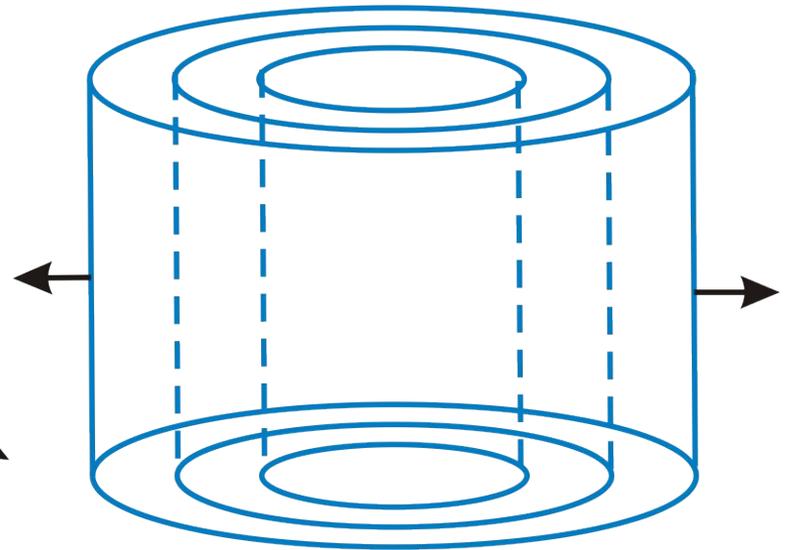
Плоские, сферические и цилиндрические волны



плоская волна

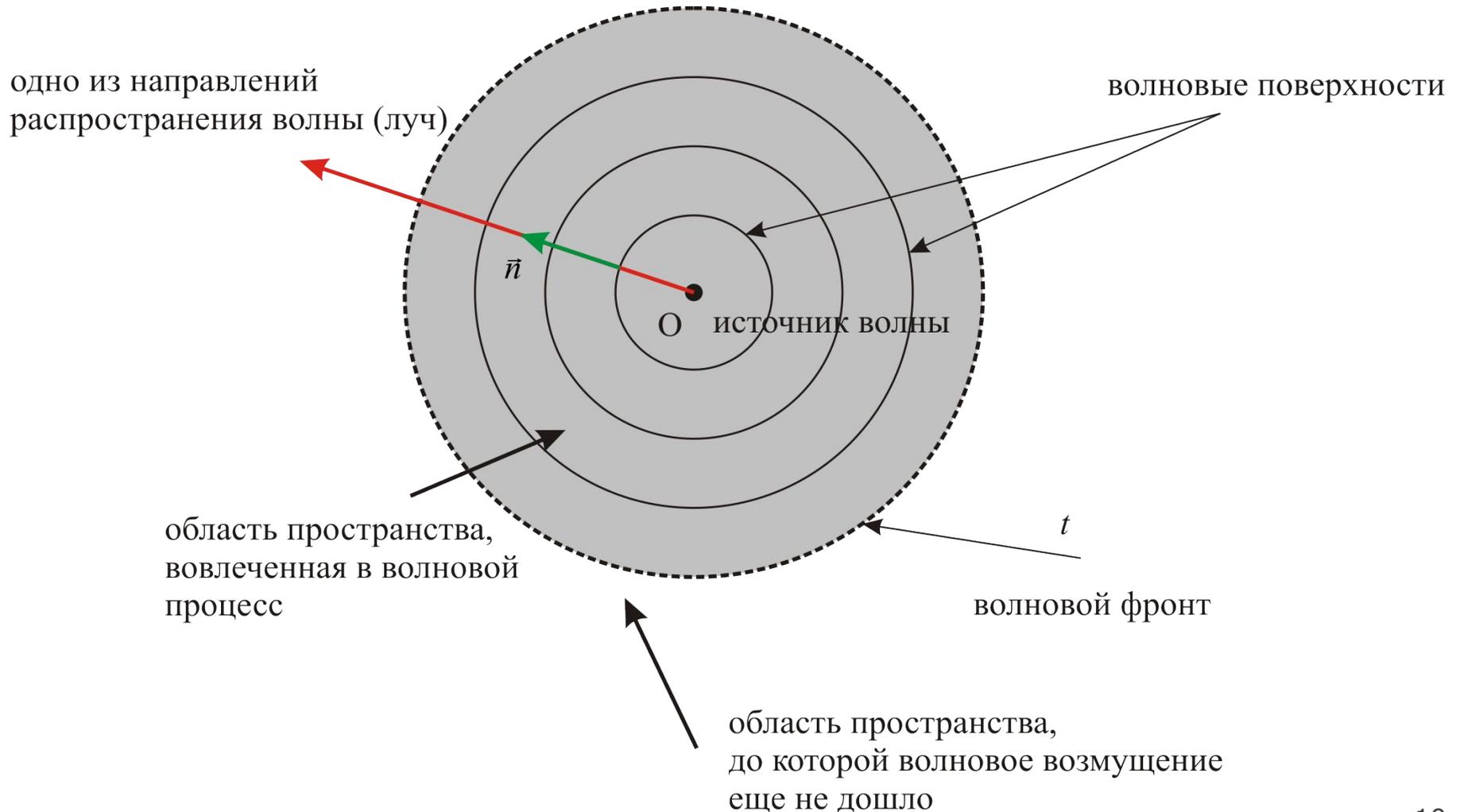


сферическая волна



цилиндрическая волна

Характеристики волн



Характеристики волн

- Пусть v – скорость движения волнового фронта (**фазовая скорость волны**), \mathbf{n} – единичный вектор нормали к волновой поверхности (показывает направление распространения волны), ω – циклическая частота колебаний источника волны (частиц упругой среды), ν – линейная частота колебаний частиц упругой среды, $T = \nu^{-1}$ – период колебаний.
- **Длина волны λ** - расстояние, на которое распространяется волна за время, равное одному периоду колебаний частиц среды:

$$\lambda = \nu T$$

Характеристики волн

- Волновое число k – величина, равная отношению циклической частоты ω к скорости волны v :

$$k = \frac{\omega}{v}$$

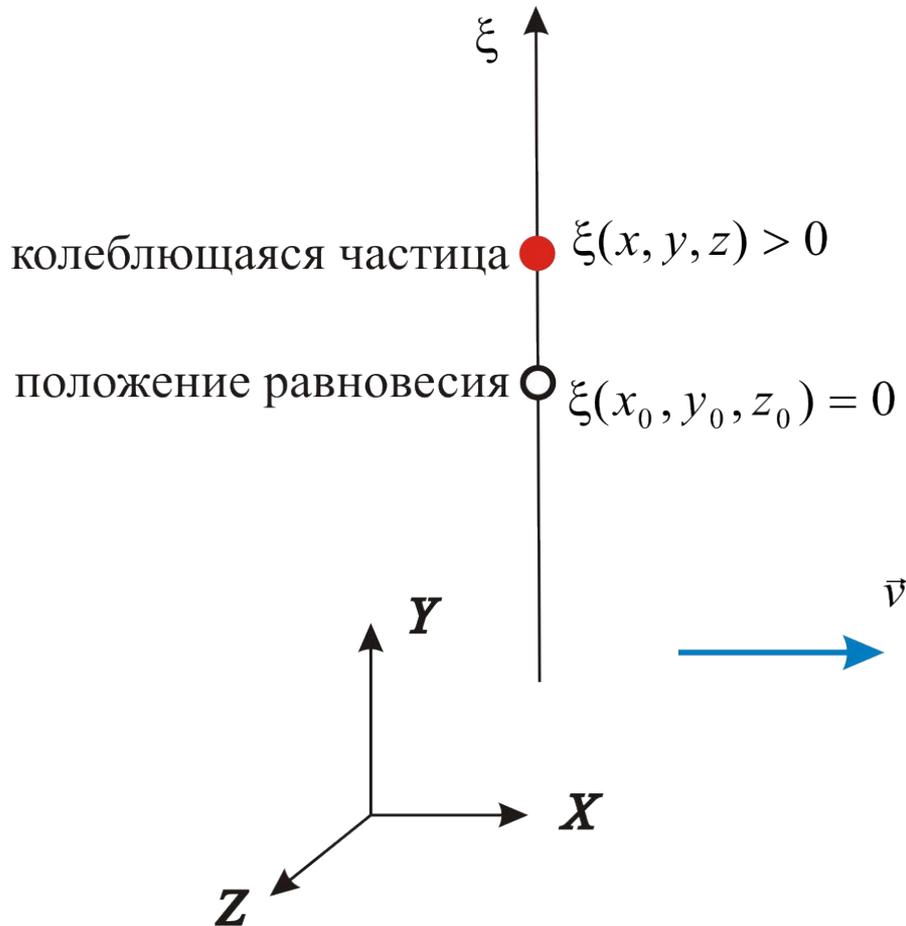
- Другое выражения для волнового числа:

$$k = \frac{\omega}{v} = \omega \frac{T}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- Волновой вектор \mathbf{k} – вектор, модуль которого равен волновому числу k , а направление совпадает с направлением нормали \mathbf{n} к волновой поверхности

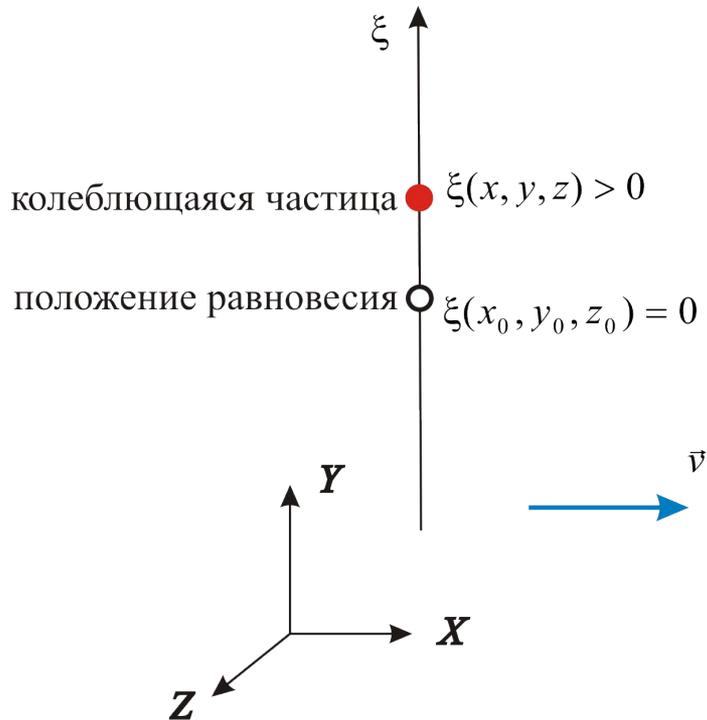
$$\mathbf{k} = k\mathbf{n} = \frac{\omega}{v}\mathbf{n}$$

Уравнение плоской волны



- Обозначим буквой ξ величину смещения из положения равновесия частицы упругой среды, совершающей колебания в процессе распространения волны; буквами x, y, z обозначим пространственные координаты точки, которая является положением равновесия этой частицы

Уравнение плоской волны



- **Уравнение волны** – это функция, описывающая зависимость величины смещения ξ колеблющейся частицы от координат x, y, z этой частицы и времени t :

$$\xi = \xi(x, y, z, t)$$

- **Направление смещения частицы** может совпадать с направлением распространения волны (продольная волна) или быть перпендикулярным этому направлению (поперечная волна)

Плоская волна

- Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси X : в такой волне частицы среды, расположенные в плоскости $x = \text{const}$, колеблются одинаково, т.е. в любой момент времени у них одинакова величина смещения ξ из положения равновесия.
- В этом случае ξ является функцией только координаты x и времени t :

$$\xi = \xi(x, t)$$

- Если колебания частиц – гармонические, то уравнение колебаний частиц, расположенных в плоскости $x = 0$ (источник) описываются функцией

$$\xi(0, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Уравнение плоской волны

- Если волна распространяется со скоростью v в положительном направлении оси X , то колебания частиц, расположенных в плоскости $x = \text{const}$ будут отставать по времени от колебаний частиц в плоскости $x = 0$ на величину $\tau = x/v$:

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- Полученное уравнение представляет собой **уравнение плоской гармонической волны**, распространяющейся в положительном направлении оси X :

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

- Здесь:
 - A – амплитуда волны;
 - ω – циклическая частота колебаний источника (частиц среды),
 - $k = \omega/v$ – волновое число,
 - $\omega t - kx + \phi_0$ – фаза волны,
 - ϕ_0 – начальная фаза (определяется выбором начала отсчета координаты x и времени t).

Фазовая скорость волны

- **Фазовой скоростью** v_ϕ волны называется скорость перемещения в пространстве поверхности постоянной фазы волны.
- Фазовую скорость плоской гармонической волны можно определить, записав условие постоянства ее фазы:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}$$

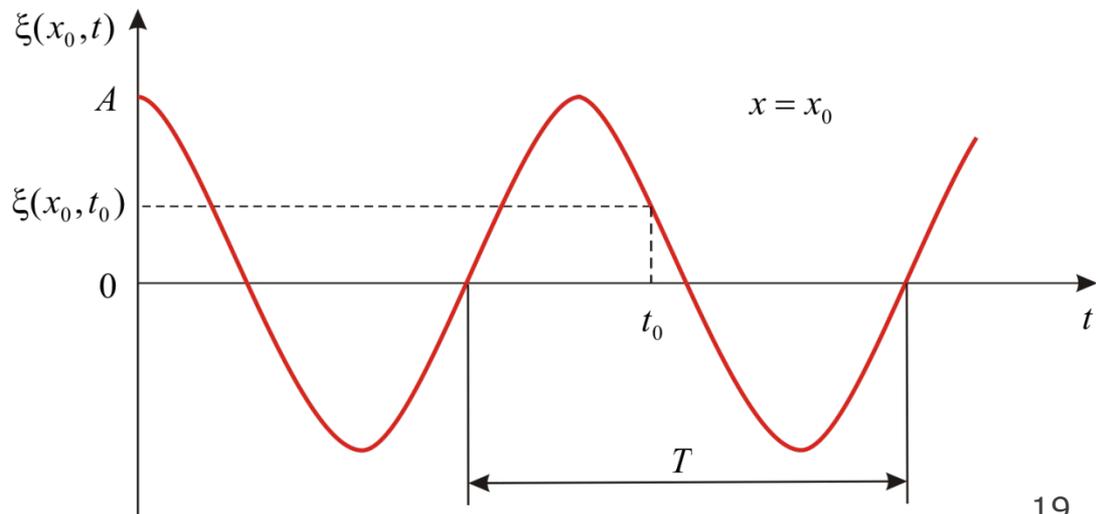
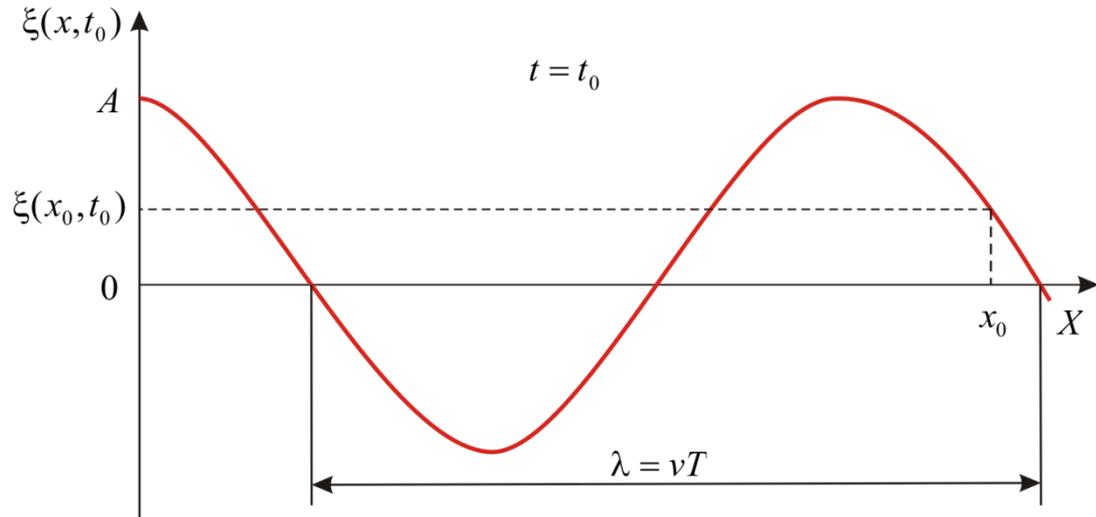
- Это равенство представляет собой уравнение плоскости в пространстве, скорость перемещения которой и является фазовой скоростью волны:

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega t + \varphi_0 - \text{const}}{k} \right) = \frac{\omega}{k} = v$$

- В гармонической волне фазовая скорость совпадает со скоростью ее распространения:

Уравнение колебаний и профиль волны

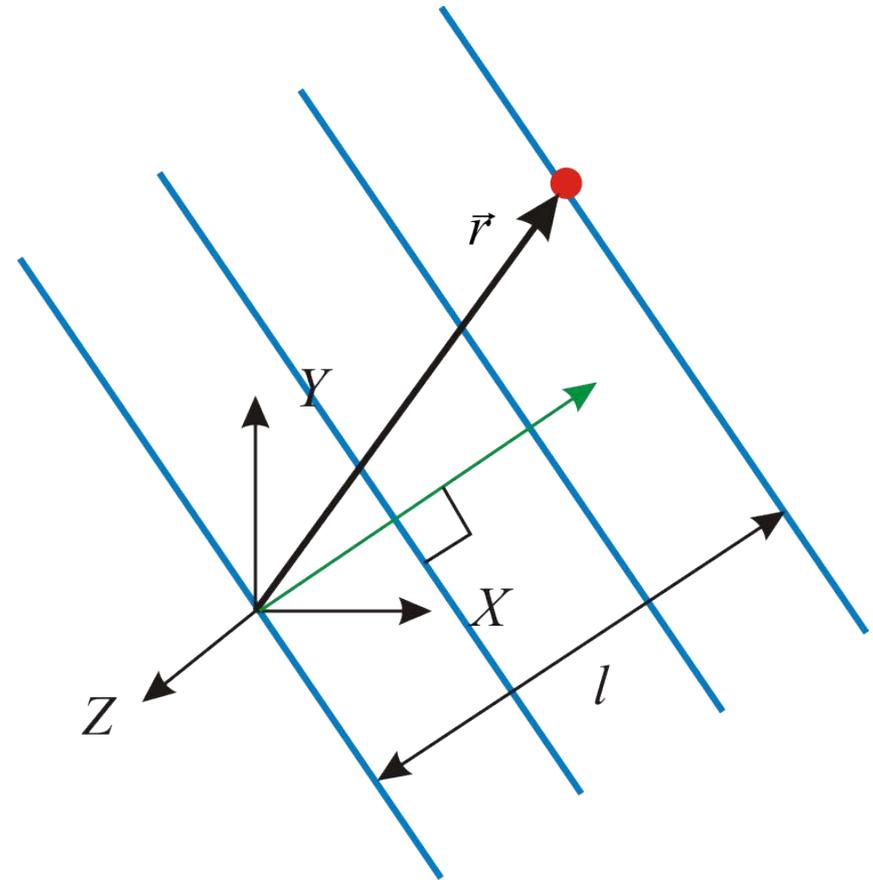
- На рисунке представлены графики зависимости функции $\xi(x,t)$ от времени t (уравнение колебания частицы в точке с координатой x) и координаты x (профиль волны).



Уравнение волны, распространяющейся в произвольном направлении

- Рассмотрим плоскую волну, волновой вектор которой \mathbf{k} направлен под углами α , β и γ к соответствующим осям X , Y и Z декартовой системы координат.
- Уравнение колебаний частиц, расположенных на волновой поверхности, проходящей через начало координат:

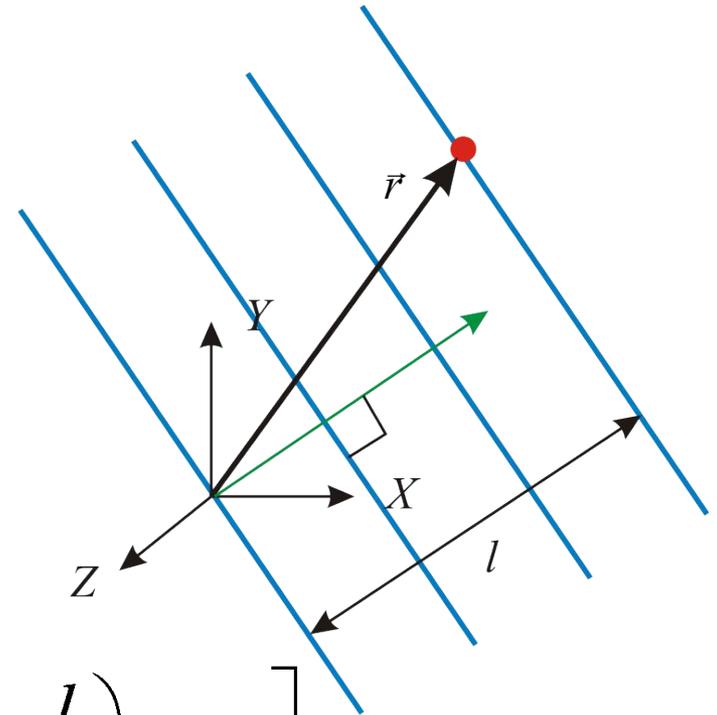
$$\xi_0 = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$



Уравнение волны, распространяющейся в произвольном направлении

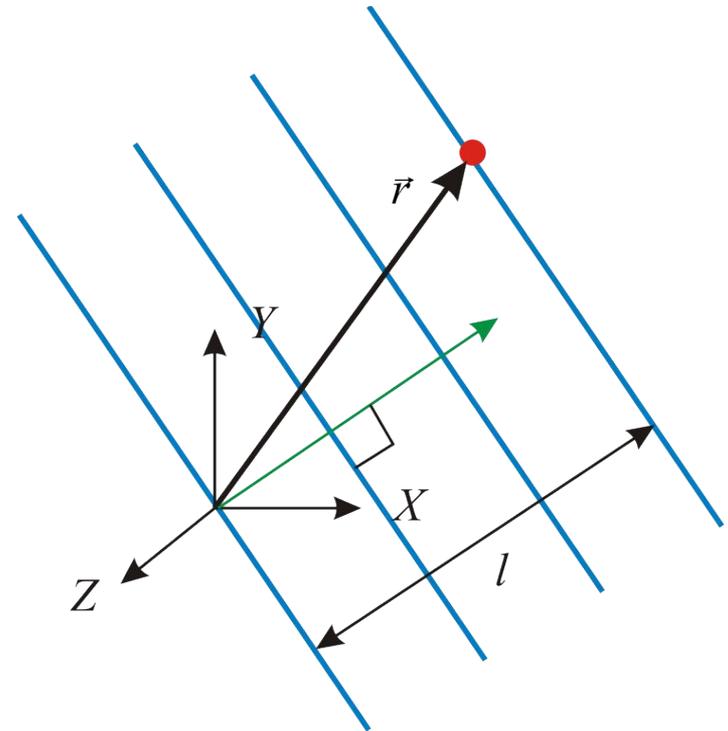
- Колебания частиц, положения равновесия которых принадлежат другой волновой поверхности, отстоящей на расстояние l первой, запаздывают по времени на величину $\tau = l/v$, где v – скорость волны:

$$\begin{aligned}\xi &= A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{v}\right) + \varphi_0\right] = \\ &= A \cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}l + \varphi_0\right] = A \cos[\omega t - kl + \varphi_0]\end{aligned}$$



Уравнение волны, распространяющейся в произвольном направлении

- Поскольку расстояние l можно представить в виде $l = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$, где \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки рассматриваемой волновой поверхности, \mathbf{n} – вектор нормали к ней, то



$$\begin{aligned}\xi &= A \cos[\omega t - kl + \varphi_0] = A \cos[\omega t - k \overset{\boxtimes}{r} \cdot \overset{\boxtimes}{n} + \varphi_0] = \\ &= A \cos[\omega t - \overset{\boxtimes}{k} \cdot \overset{\boxtimes}{r} + \varphi_0] = A \cos[\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0]\end{aligned}$$

Уравнение волны, распространяющейся в произвольном направлении

- Таким образом, уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении, заданном единичным вектором \mathbf{n} или волновым вектором \mathbf{k} , имеет вид

$$\xi(\mathbf{r}, t) = A \cos[\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_0]$$

Волновое уравнение

- **Волновым уравнением** называется дифференциальное уравнение, решением которого является уравнение распространяющейся в пространстве плоской (сферической, цилиндрической и т.д.) волны.
- Получим волновое уравнение путем дифференцирования одного из его решений, например, уравнения плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\xi = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)$$

Волновое уравнение

$$\xi = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = A \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi_0)$$

- Вычислим вторую производную от ξ по времени t и вторые производные от ξ по координатам x, y, z :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2 \xi;$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2 \xi;$$

- Теперь сложим последние три равенства:

$$\Delta \xi = -k_x^2 \xi - k_y^2 \xi - k_z^2 \xi = -k^2 \xi$$

Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -\omega^2 \xi; \quad \Delta \xi = -k_x^2 \xi - k_y^2 \xi - k_z^2 \xi = -k^2 \xi$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k_x^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_x^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -k_y^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_y^2 \xi;$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -k_z^2 A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = -k_z^2 \xi;$$

- Выразив из первого и последнего уравнений ξ и приравняв их друг другу, получим:

$$-\frac{1}{k^2} \Delta \xi = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Волновое уравнение

- Учитывая, что $k = \omega/v$, где v – фазовая скорость волны, получим **волновое уравнение**:

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

- Можно показать, что любая функция вида

$$f(x, y, z, t) = f(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$

тоже является решением волнового уравнения.

ЛЕКЦИЯ 2. ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ

2.2 Энергия упругих волн. Перенос энергии упругой волной

Энергия упругих волн

- Для вычисления энергии упругой волны выделим в среде, где распространяется волна, малый объем ΔV , масса которого равна $\rho\Delta V$, где ρ – плотность вещества среды.
- Пусть плоская продольная волна распространяется вдоль оси X :

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- Благодаря волне объем ΔV приобретает скорость и кинетическую энергию:

$$\dot{\xi} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0);$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho \Delta V \dot{\xi}^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Энергия упругих волн

- Потенциальная энергия деформированного объема ΔV равна

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \Delta V = \left\{ v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow E = \rho v^2 = \rho \frac{\omega^2}{k^2} \right\} = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- Полная энергия объема ΔV :

$$\Delta E = \Delta K + \Delta\Pi = \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- Объемная плотность энергии упругой волны составит величину:

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

Энергия упругих волн

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

- На практике большой интерес представляет не мгновенное, а среднее по времени значение объемной плотности энергии:

$$\langle w \rangle = \rho \omega^2 A^2 \langle \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

- Энергия упругой волны пропорциональна квадрату ее амплитуды.

Поток энергии волны

- Пусть в пространстве распространяется упругая волна и задана некоторая поверхность S . Частицы упругой среды, вовлеченные в волновой процесс, обладают дополнительной энергией, обусловленной их упорядоченным согласованным движением. Таким образом, *энергия упругой волны – это энергия согласованного колебательного движения частиц среды.*
- В процессе своего распространения волна переносит энергию из областей пространства, вовлеченных в волновой процесс, в области, где колебания частиц еще не возникли. Таким образом, имеет место процесс переноса энергии.

Поток энергии волны

- Для количественного описания процесса переноса энергии волной вводятся понятия потока энергии, вектора плотности потока энергии и интенсивности волны.
- **Поток энергии Φ** – количество энергии, переносимой волной за единицу времени через заданную площадь S :

$$\Phi = \frac{dW}{dt}$$

где dW – количество энергии, переносимой волной через поверхность S за промежуток времени dt .

Единица потока энергии – **ватт (Вт)**. $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$.

Поток энергии волны

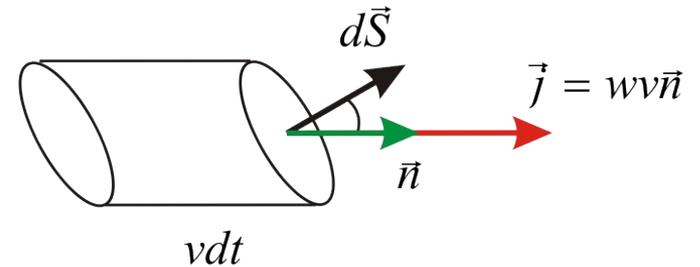
- Вектор плотности потока энергии \mathbf{j} – произведение объемной плотности энергии волны w , скорости распространения волны v и единичного вектора нормали \mathbf{n} в направлении распространения волны:

$$\mathbf{j} = wv\mathbf{n}$$

- Единица плотности потока энергии – **ватт на метр в квадрате (Вт/м²)**.
- Общие представления о потоке энергии в пространстве были введены Н.А. Умовым (1846 – 1915). Вектор плотности потока энергии без конкретизации ее физической природы называется **вектором Умова**.

Вектор Умова

- Установим связь между вектором \vec{j} и потоком Φ . Для этого найдем поток $d\Phi$ энергии волны через произвольную площадку dS , расположенную под углом α к направлению распространения волны:



$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = w \frac{dS \cos \alpha v dt}{dt} = wv n dS = \vec{j} dS$$

Плотность потока энергии

$$j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}} = \frac{dW}{dtdS_{\perp}}$$

- Таким образом, модуль плотности потока энергии j равен потоку энергии, переносимому волной через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны
- Поток энергии Φ через произвольную поверхность S может быть найден, если известен вектор \mathbf{j} в каждой точке этой поверхности:

$$\Phi = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

Интенсивность волны

- Интенсивность волны I – скалярная величина, равная модулю среднего по времени вектора плотности потока энергии:

$$I = \left| \langle \vec{j} \rangle \right| = \langle w \rangle v = \left\langle \frac{dW}{dt dS_{\perp}} \right\rangle$$

- Таким образом, интенсивность волны I равна произведению средней по времени объемной плотности энергии волны и скорости волны.

Интенсивность упругой гармонической волны

- Вычислим интенсивность упругой волны:

$$I = \left\langle \frac{dW}{dt dS_{\perp}} \right\rangle = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 v$$

- Таким образом, интенсивность I волны пропорциональная квадрату ее амплитуды A .

ЛЕКЦИЯ 2. ВОЛНЫ В УПРУГИХ СРЕДАХ

2.3 Стоячая волна

Стоячая волна

- **Стоячая волна** образуется при наложении двух плоских волн одинаковой частоты и амплитуды, распространяющихся навстречу друг другу:

$$\xi_{1,2} = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi_{01,2})$$

- При наложении двух волн любая частица среды одновременно участвует в двух колебательных движениях, описываемых этими уравнениями. Результирующее смещение частицы из положения равновесия ξ равно сумме смещений ξ_1 и ξ_2 , вызванных каждой из бегущих волн:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

Уравнение стоячей волны

- Уравнение волны, образующейся в результате наложения двух плоских волн, т.е. **уравнение стоячей волны**:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_1 + \xi_2 = A[\cos(\omega t - kx + \varphi_{01}) + \cos(\omega t + kx + \varphi_{02})] = \\ &= 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2}\right)\end{aligned}$$

- Изменим начало отсчета координаты x и момента начала времени t , заменив переменные:

$$x = x' - \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2k}; \quad t = t' - \frac{\varphi_{01} + \varphi_{02}}{2\omega}$$

Уравнение стоячей волны

- Тогда уравнение бегущей волны в переменных x' и t' примет вид:

$$\xi = 2A \cos kx' \cos \omega t'$$

- Таким образом показано, что уравнение стоячей волны всегда может быть приведено к виду

$$\xi = 2A \cos kx \cos \omega t$$

- Из уравнения видно, что частицы упругой среды совершают гармонические колебания с циклической частотой ω , амплитуда которых $|2A \cos kx|$ зависит от координаты x положения равновесия колеблющейся частицы.

Профиль стоячей волны

- **Пучности** стоячей волны – это точки пространства, которые являются положениями равновесия частиц среды, совершающих колебания с максимальной амплитудой ($2A$)

Максимальное значение амплитуды $|2A\cos kx|$ достигается при условии: $|\cos kx| = 1$, из которого можно определить положение пучностей в пространстве:

$$x(\text{пуч.}) = \pm \frac{\pi n}{k} = \pm \frac{n\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Расстояние между двумя соседними пучностями равно половине длины волны: $\Delta x(\text{пуч.}) = \lambda/2$.

Профиль стоячей волны

- **Узлами** стоячей волны называются точки пространства, которые являются положения равновесия частиц упругой среды с нулевой амплитудой колебаний (0).

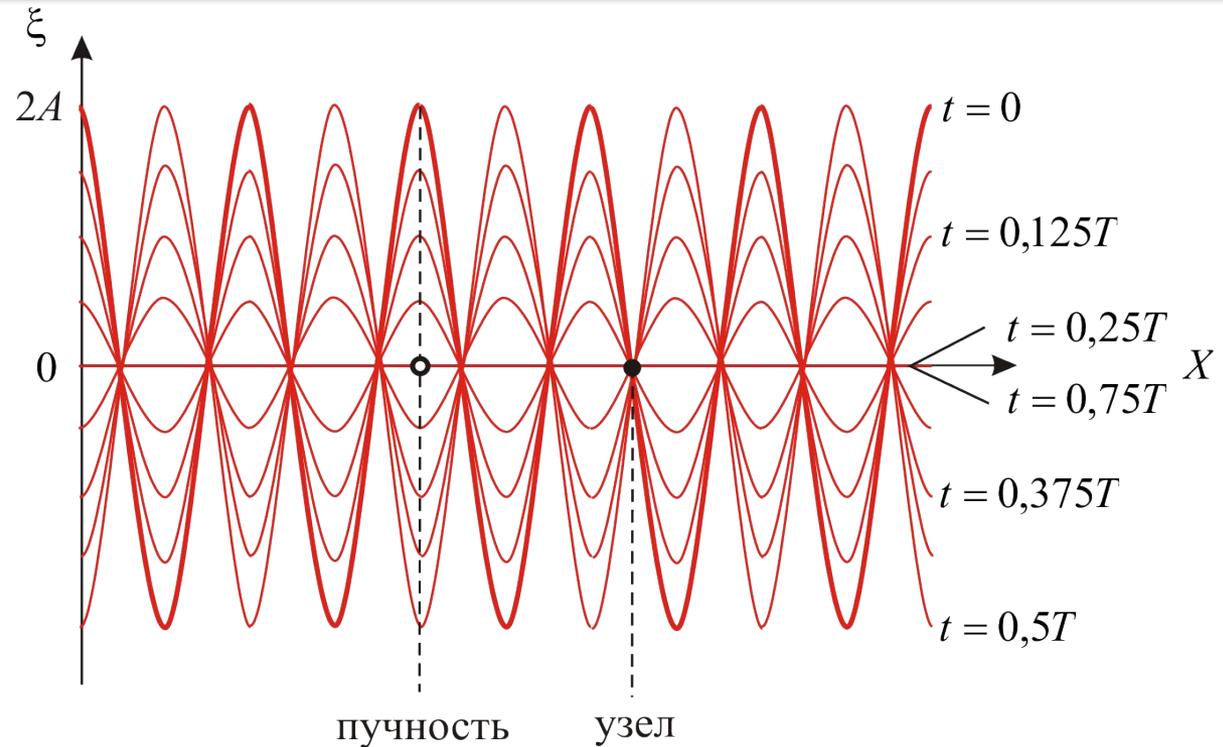
Амплитуда $|2A\cos kx| = 0$ достигается при условии: $|\cos kx| = 0$, из которого можно определить положение узлов в пространстве:

$$x(\text{узл.}) = \pm \frac{(2n+1)\pi}{k} \frac{1}{2} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны: $\Delta x(\text{узл.}) = \lambda/2$.

Профиль стоячей волны

- На рисунке представлен профиль стоячей волны в разные моменты времени, разделенные промежутком в $1/16$ периода колебаний T .
- Видно, что частицы, расположенные в узлах, не колеблются, а частицы пучностей волны – колеблются с максимальной амплитудой.



$$\xi = 2A \cos kx \cos \omega t$$

Профиль стоячей волны

- Можно показать, что за период колебаний дважды происходит превращение энергии стоячей волны из полностью потенциальной, сосредоточенной вблизи узлов волны, в полностью кинетическую, сосредоточенную в основном вблизи пучностей волны.
- В результате энергия переходит от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. Средний по времени поток энергии, переносимой стоячей волной, в любом перпендикулярном оси X сечении волны равен нулю (*в стоячей волне нет переноса энергии*)