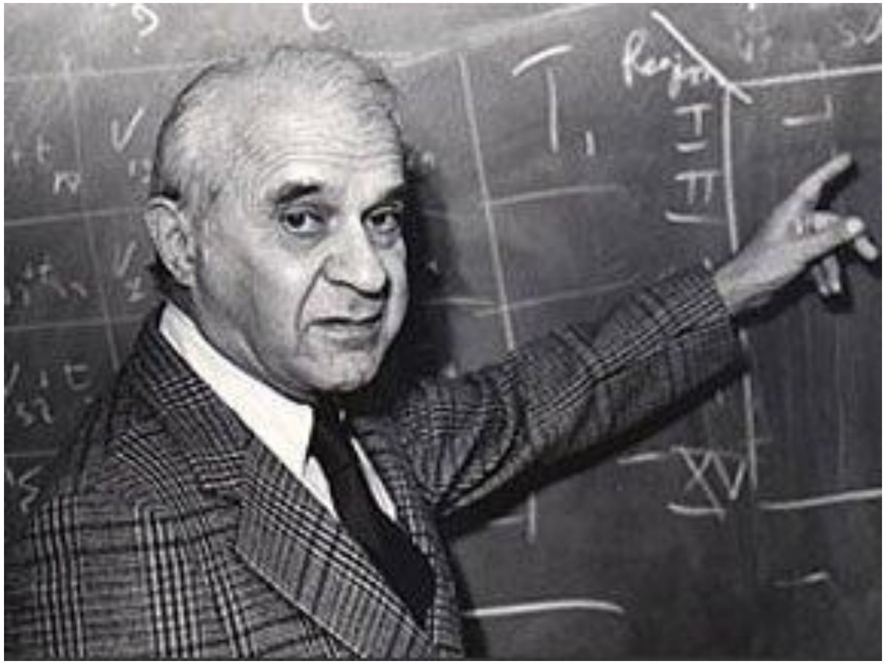
Модель Леонтьева

Лекция 5

План

- Постановка задачи
- Матричный вид



Василий Васильевич Леонтьев (5 августа 1905 — 5 февраля 1999)

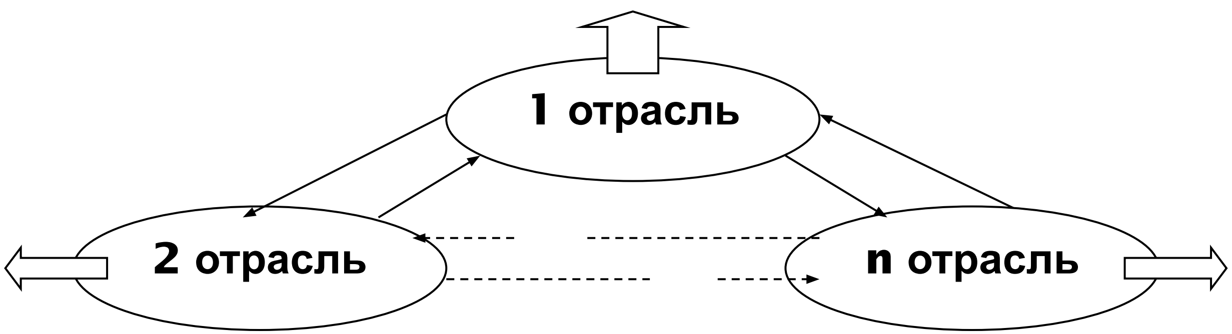
- Лауреат Нобелевской премии (1973) «за развитие метода «затраты — выпуск»и за применение этого метода в основных проблемах экономики».

- Межотраслевой баланс - экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходованием продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска.

- В модели Леонтьева:
- рассматривается экономика, состоящая из «чистых» отраслей, т.е. когда каждая отрасль выпускает один и только свой вид продукта;
- взаимосвязь между выпуском и затратами описывается линейными уравнениями (линейная и постоянная технология);
- вектор спроса на товары считается заданным, т.е. в модели отсутствуют как таковые оптимизационные задачи потребителей;
- вектор выпуска товаров вычисляется, исходя из спроса, т.е. отсутствуют как таковые оптимизационные задачи фирм;
- равновесие понимается как строгое равенство спроса и предложения, т.е. стоимостной баланс отсутствует, более того, цены товаров в модели не рассматриваются вообще.

Постановка задачи. Математическая модель.

- Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на ***n*** отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т. д.).
- Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление).
- Рассмотрим отрасль ***i***, ***i* = 1, 2,…, *n***.



- Пусть, эта отрасль выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме x_i, называемом еще <u>валовым выпуском</u>.

Распределение ВВП:

1. часть объема продукции x_i произведенной i-ой отраслью, используется для собственного производства в объеме x_{ii} ;
2. часть поступает в остальные отрасли

$$j = 1,\ldots n$$

для потребления при производстве в объемах x_{ij} ;

3. и некоторая часть объемом y_i, для потребления в непроизводственной сфере (y_i, называют еще конечным потреблением, конечным спросом, прибавочным или <u>конечным продуктом</u>).

- Перечисленные сферы распределения валового продукта ***i***-ой отрасли приводят к соотношениям баланса:

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} + y_1, \\ x_2 = x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} + y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} + y_n \end{cases} \qquad (*)$$

- Введем коэффициенты прямых затрат ***aij***, которые показывают, сколько единиц продукции ***i***-ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли ***j***.

$A = \left(a_{ij} \right) -$ матрица прямых затрат

Величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ в течение длительного времени меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа, т.к. технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время, и, следовательно, объем потребления j-й отраслью продукции i-й отрасли, при производстве своей продукции объема x_j , есть технологическая константа.

- Тогда количество продукции, произведенной в отрасли ***i*** в объеме ***xij*** и поступающей для производственных нужд в отрасль ***j***, можно записать в виде:

$$xij=aij*xj,$$

а *<u>соотношения баланса</u>* примут вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases} \qquad (**)$$

- Отсюда нетрудно получить величину конечного продукта, произведенного ***i***-ой отраслью:

$$yi= xi-(ai1*x1+ai2*x2+\ldots+ain*xn), (***)$$

- Соответственно, величина суммарного конечного продукта для всех ***n*** отраслей:

$$P=\sum yi \text{ для } i=1,2,\ldots, n .$$

Матричный вид модели Леонтьева

Введем обозначения:

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

На основании согласованности матрицы А с матрицей Х:

$X = A \cdot X + Y$ **- матричный вид системы (**) или уравнение межотраслевого баланса (модель Леонтьева).**

Наряду с коэффициентами прямых затрат a_{ij} рассматривают <u>коэффициенты косвенных</u> <u>затрат</u>.

Так, например, j-я отрасль использует продукцию i-й отрасли непосредственно (прямые затраты) и опосредованно, потребляя ранее произведенную свою продукцию и продукцию других отраслей, для производства которых была использована продукция i-й отрасли. Эти опосредованные один раз затраты называются <u>косвенными затратами первого порядка.</u>

Коэффициенты косвенных затрат первого порядка образуют матрицу

$$A^{(1)} = A^2 = A \cdot A$$

Матрица $\left(E-A\right)^{-1}$ называется ***матрицей полных затрат***, элементы которой показывают величину валового выпуска продукции *i*-й отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта *j*-й отрасли.

Чистой продукцией отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой отрасли.

Уравнение межотраслевого баланса используется:

1) необходимо рассчитать объем конечного потребления по известному объему валового выпуска

$$Y = X - A \cdot X$$

2) Необходимо рассчитать объем валового выпуска по известному объему конечного потребления

$$X = \left(E - A\right)^{-1} \cdot Y$$

- ***Возникающие на этой модели задачи.***
- 1. Каким образом размер валового выпуска x_i в отрасли i влияет на величину суммарного конечного продукта?
- 2. Какими должны быть размеры валового выпуска по отраслям, чтобы обеспечить заданную величину суммарного конечного продукта?
- 3. Какими должны быть размеры валового выпуска по отраслям, чтобы обеспечить максимум суммарного конечного продукта?
- 4. Какими должны быть размеры валового выпуска по отраслям, чтобы обеспечить минимум суммарного конечного продукта?