Лекция № 5. Аффинные преобразования.

 (8-906) 456 47 97.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. Преобразование координат

Фундаментом компьютерной графики является аналитическая геометрия, и ее раздел - координатный метод.

- Каждая точка на экране (бумаге) задается координатами (*местонахождение пиксела)*.
- При выполнении промежуточных действий отображения используются разные системы координат и преобразования из одной системы в другую.

2.1.1. Общие вопросы преобразования координат.

Пусть задана n-мерная система координат, описывающая точку в пространстве, в базисе:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Пусть задана новая p-мерная система координат в базисе:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_p)$$

Тогда, новые координаты точки:

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, \ldots, k_n), \\ \ldots \\ m_p = f_p(k_1, k_2, \ldots, k_n). \end{cases}$$

Обратное преобразование:

По известным координатам: $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$

определить координаты $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$

$$
\begin{cases}
k_1 = \phi_1(m_1, m_2, \ldots, m_p), \\
k_2 = \phi_2(m_1, m_2, \ldots, m_p), \\
\ldots \\
k_n = \phi_p(m_1, m_2, \ldots, m_p).
\end{cases}
$$

Если $n \neq p$, то преобразование может быть не однозначным !

Классификация преобразования координат:

<u>По системам координат</u> - прямоугольная, полярная; преобразование из прямоугольной системы в полярную и наоборот.

<u>По виду функций преобразования</u> f_i и ϕ_j- *линейные* и *нелинейные*.

Функция f_i *линейная* относительно аргументов $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, если:

$$f_i = a_{i,1}k_1 + a_{i,2}k_2 + \dots + a_{i,n}k_n + a_{i,n+1}$$

где: $a_{i,j}$ - константы.

Преобразование, при котором константы $\mathbf{a_{i,j}}$ линейны и $n = p$, называется ***аффинным*** **(affin –** *греч.* **похожий).**

Линейные преобразования в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{in} & a_{1,n+1} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} & k_2 \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} & a_{p,n+1} & k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

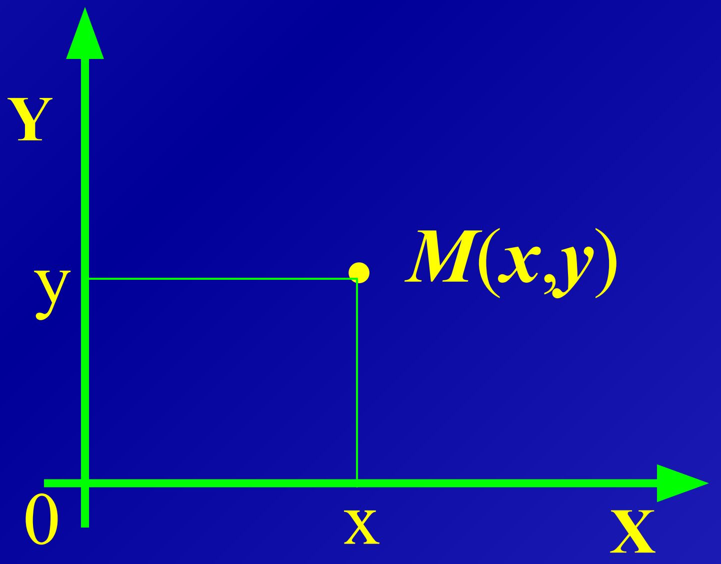
Правила перемножения матриц:

$$
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & c_{ij} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix}
b_{1j} & \cdot & \\
b_{2j} & \cdot & \\
\cdot \quad \cdot & \ldots & \cdot \\
b_{nj} & \cdot &
\end{bmatrix}
$$

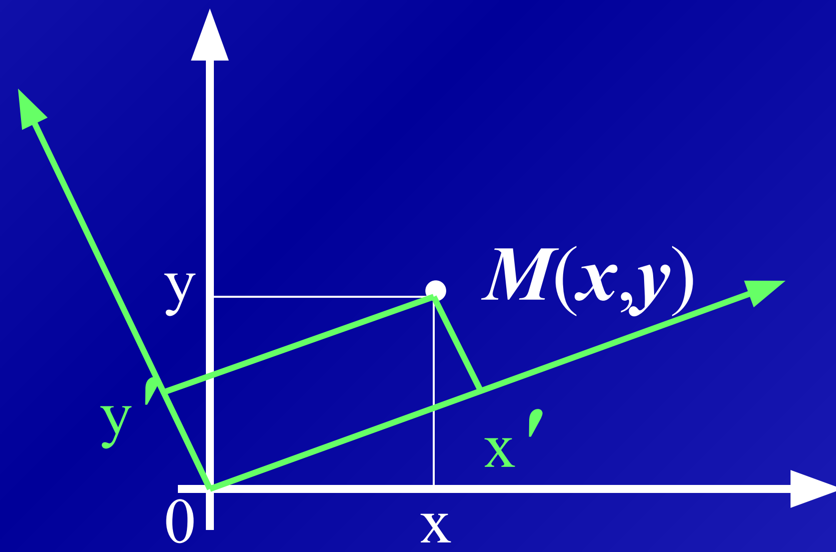
2.2 Аффинные преобразования на плоскости

На плоскости введена прямолинейная координатная система КС

Каждой точке М ставится в соответствие упорядоченная пара чисел (x,y) ее координат



Введя на плоскости еще одну прямоугольную систему координат, мы ставим в соответствие той же точке М другую пару чисел – (x′,y′). Переход от одной прямолинейной КС на плоскости к другой описываются следующим соотношениями:



$$x' = Ax + By + C,$$
$$y' = Dx + Ey + F$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= A'x' + B'y' + C', \\ y &= D'x' + E'y' + F' \end{aligned}}$$

Где A,B,C,D,E,F- константы, связанные неравенством:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} \neq 0$$

Запись аффинного преобразования в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

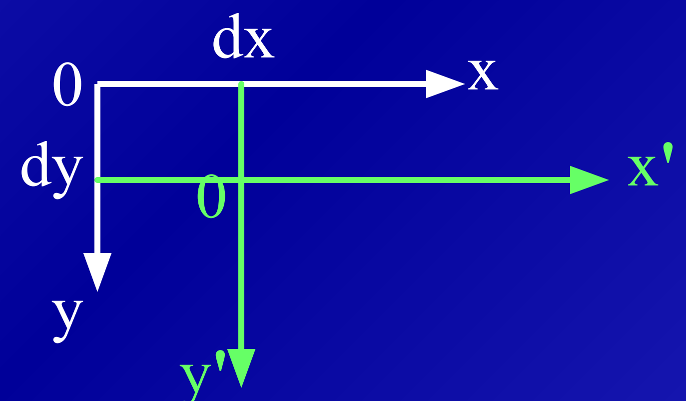
Чтобы учесть константы C и F, необходимо перейти к *однородным координатам.*

Для этого добавлена строка с <u>единицами</u> в матрицах координат.

Частные случаи аффинного преобразования

1. Параллельный сдвиг координат.

$$\begin{cases} x' = x - dx \\ y' = y - dy \end{cases}$$



В матричной форме:

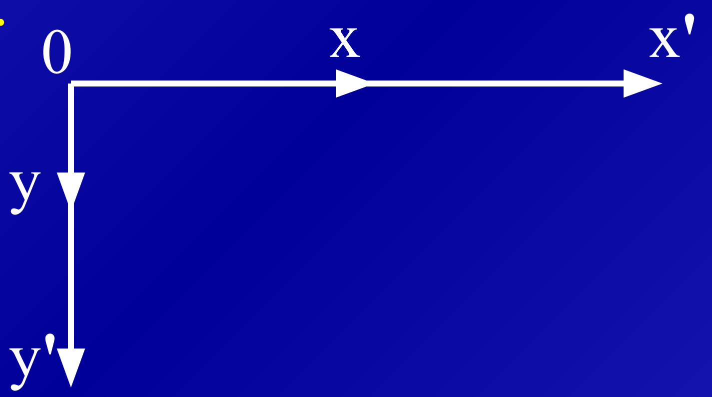
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' + dx \\ y = y' + dy \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Растяжение-сжатие осей координат.



$$\begin{cases} x' = x / k_x \\ y' = y / k_y \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1/k_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример:

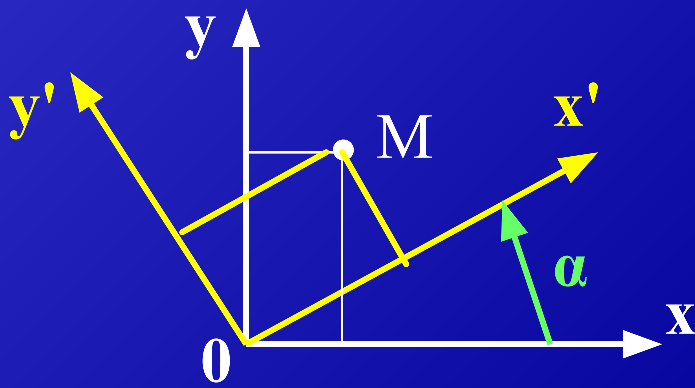
***k**$_x$ **= -1** соответствует зеркальному отражению относительно оси **y**.*

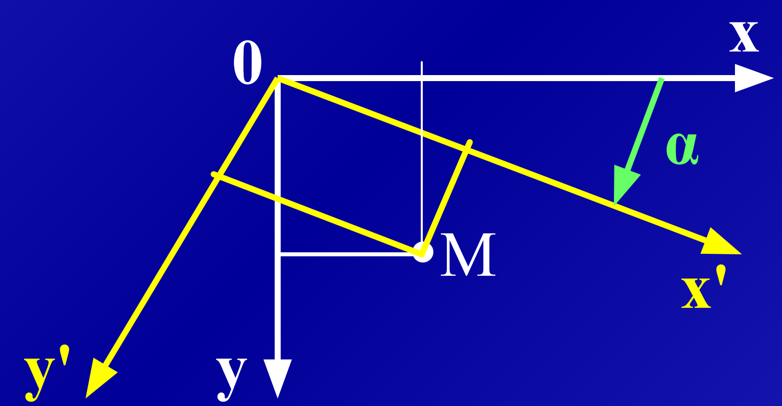
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x' \, k_x \\ y = y' \, k_y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Поворот.





$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

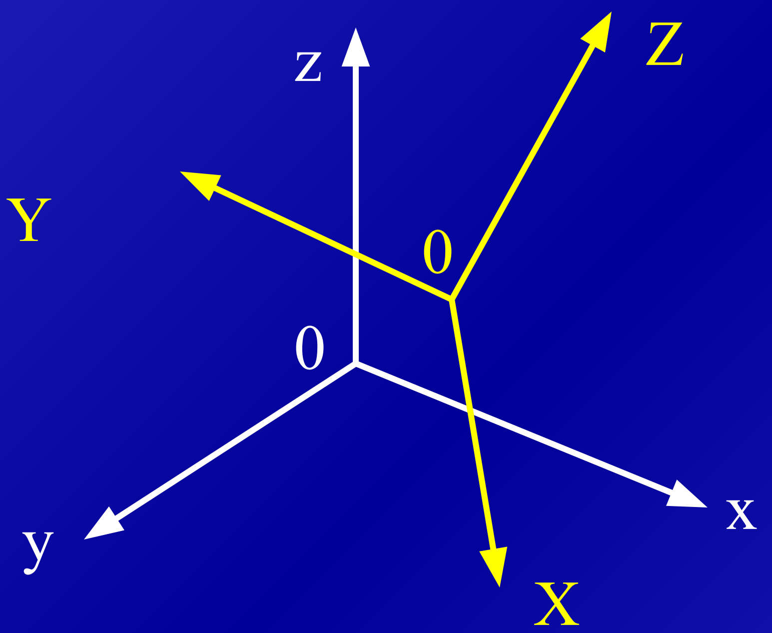
Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства аффинного преобразования:

- Любое аффинное преобразование может быть представлено как последовательность операций из числа последовательностей: сдвиг, растяжение-сжатие и поворот.
- Сохраняются прямые линии, параллельность прямых, отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой, и отношение площадей фигур.

2.3 ТРЕХМЕРНЫЕ АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ



$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D \\ Y = Ex + Fy + Gz + H \\ Z = Kx + Ly + Mz + N \end{cases}$$

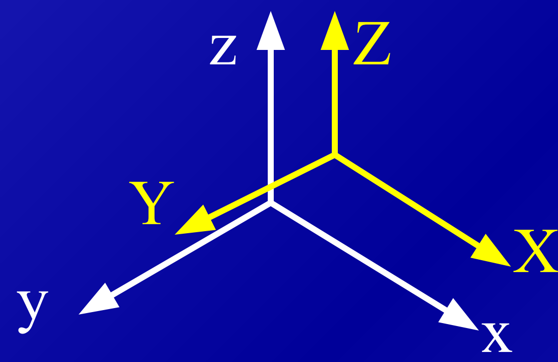
$$X = Ax + By + Cz + D$$

$$Y = Ex + Fy + Gz + H$$

$$Z = Kx + Ly + Mz + N$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

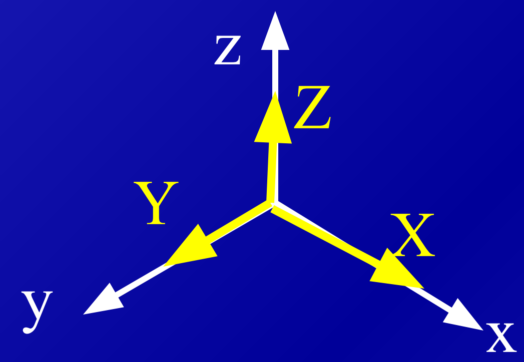
1. Сдвиг осей координат на dx, dy, dz



$$\begin{cases} \mathbf{X} = x - dx \\ \mathbf{Y} = y - dy \\ \mathbf{Z} = z - dz \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

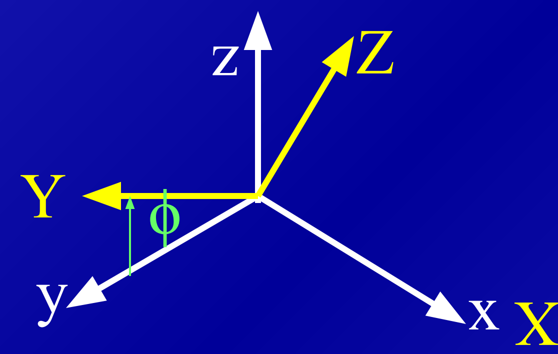
2. Растяжение - сжатие kx, ky, kz



$$
\begin{cases}
\mathbf{X} = x / kx \\
\mathbf{Y} = y / ky \\
\mathbf{Z} = z / kz
\end{cases}
\qquad
\begin{bmatrix}
1/kx & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/ky & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/kz & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

3. Повороты.

3.1. Поворот вокруг оси X на угол ϕ.

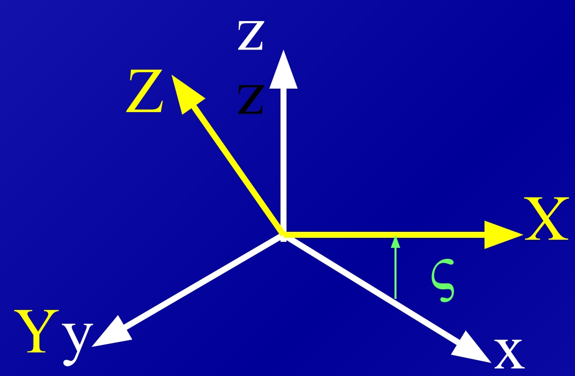


$$\begin{cases} \mathbf{X} = x \\ \mathbf{Y} = y\cos\phi - z\sin\phi \\ Z = y\sin\phi + z\cos\phi \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.Повороты.

3.2. Поворот вокруг оси Y на угол ς.

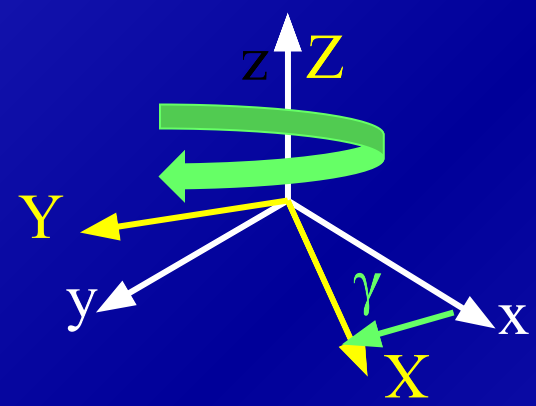


$$\left\{\begin{aligned} X &= x\cos\varsigma - z\sin\varsigma \\ Y &= y \\ Z &= x\sin\varsigma + z\cos\varsigma \end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varsigma & 0 & -\sin\varsigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varsigma & 0 & \cos\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.Повороты.

3.3. Поворот вокруг оси Z на угол γ



$$\begin{cases} \mathbf{X} = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ \mathbf{Y} = x\sin\gamma + y\cos\gamma \\ \mathbf{Z} = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

Исходные данные: n-мерная система координат.

Координаты точки: $(K_1, K_2, \ldots. K_n)$.

Новое положение точки: $(M_1, M_2, \ldots.$ Mn$)$.

Соотношения координат: $(M_1, M_2, \ldots M_n)=F(K_1, K_2, \ldots K_n)$

Преобразование объекта на плоскости:

$$\begin{cases} X = F_x(x,y) \\ Y = F_y(x,y) \end{cases}$$

Преобразование объекта в пространстве:

$$X = F_x(x,y,z)$$

$$Y = F_y(x,y,z)$$

$$Z = F_z(x,y,z)$$

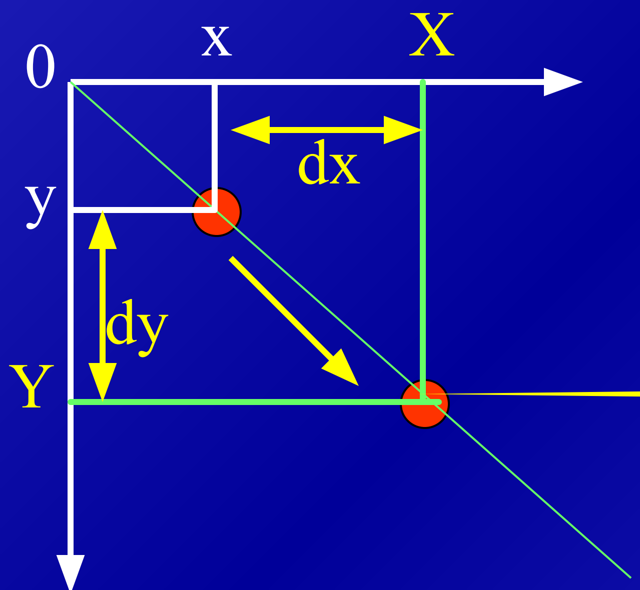
АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

$X = Ax + By + C$

$Y = Dx + Ey + F$

1. Сдвиг объекта.

$$\begin{cases} X = x + dx \\ Y = y + dy \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Обратное преобразование:

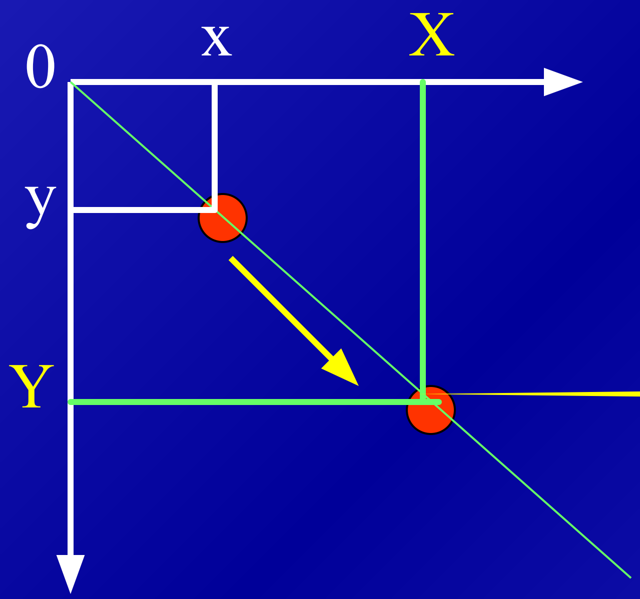
$$\begin{cases} x = X - dx \\ y = Y - dy \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

$X = Ax + By + C$

$Y = Dx + Ey + F$

2.Масштабирование.



$$\begin{cases} X = K_x \\ Y = K_y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

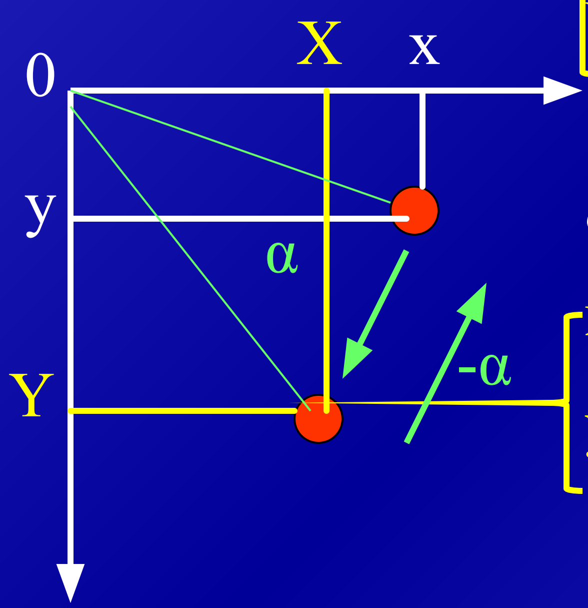
$$\begin{cases} x = X/K_x \\ y = Y/K_y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1/K_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/K_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

$X = Ax + By + C$

$Y = Dx + Ey + F$

3.Поворот вокруг центра координат (0,0).



$$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Обратное преобразование:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha \\ y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ (3-х мерное преобразование)

$$X = Ax + By + Cz + D$$

$$Y = Ex + Fy + Gz + H$$

$$Z = Kx + Ly + Mz + N$$

1. Сдвиг объекта на dx, dy, dz.

$$\begin{cases} X = x + dx \\ Y = y + dy \\ Z = z + dy \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & dy \\ 0 & 0 & 0 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

В ПРОСТРАНСТВЕ (3-х мерное преобразование)

$$X = Ax + By + Cz + D$$

$$Y = Ex + Fy + Gz + H$$

$$Z = Kx + Ly + Mz + N$$

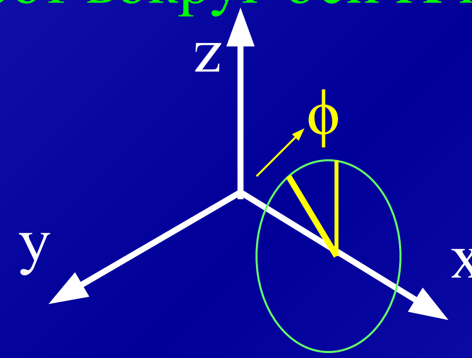
2.Масштабирование (растяжение-сжатие) объекта на k_x, k_y, k_z.

$$\begin{cases} X = k_x * x \\ Y = k_y * Y \\ Z = k_z * Z \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ (3-х мерное преобразование)

3.Повороты.

3.1. Поворот вокруг оси X на угол ϕ.

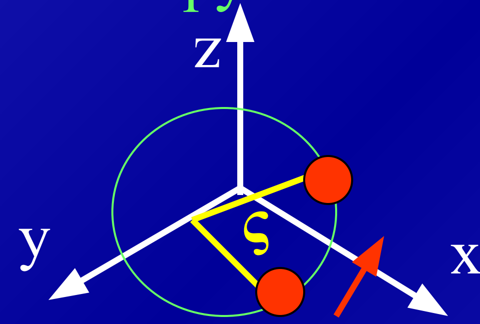


$$\begin{cases} X = x \\ Y = y\cos\phi - z\sin\phi \\ Z = y\sin\phi + z\cos\phi \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ (3-х мерное преобразование)

3.Повороты.

3.2. Поворот вокруг оси Y на угол ς.

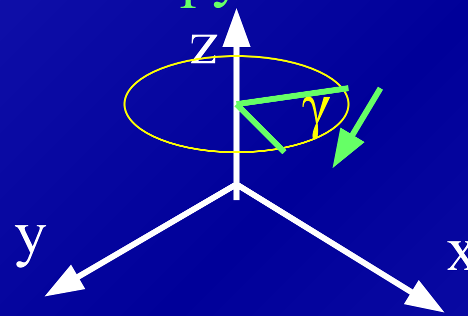


$$\begin{cases} X = x\cos\varsigma - z\sin\varsigma \\ Y = y \\ Z = x\sin\varsigma + z\cos\varsigma \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \cos\varsigma & 0 & -\sin\varsigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varsigma & 0 & \cos\varsigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ
В ПРОСТРАНСТВЕ (3-х мерное преобразование)

3.Повороты.

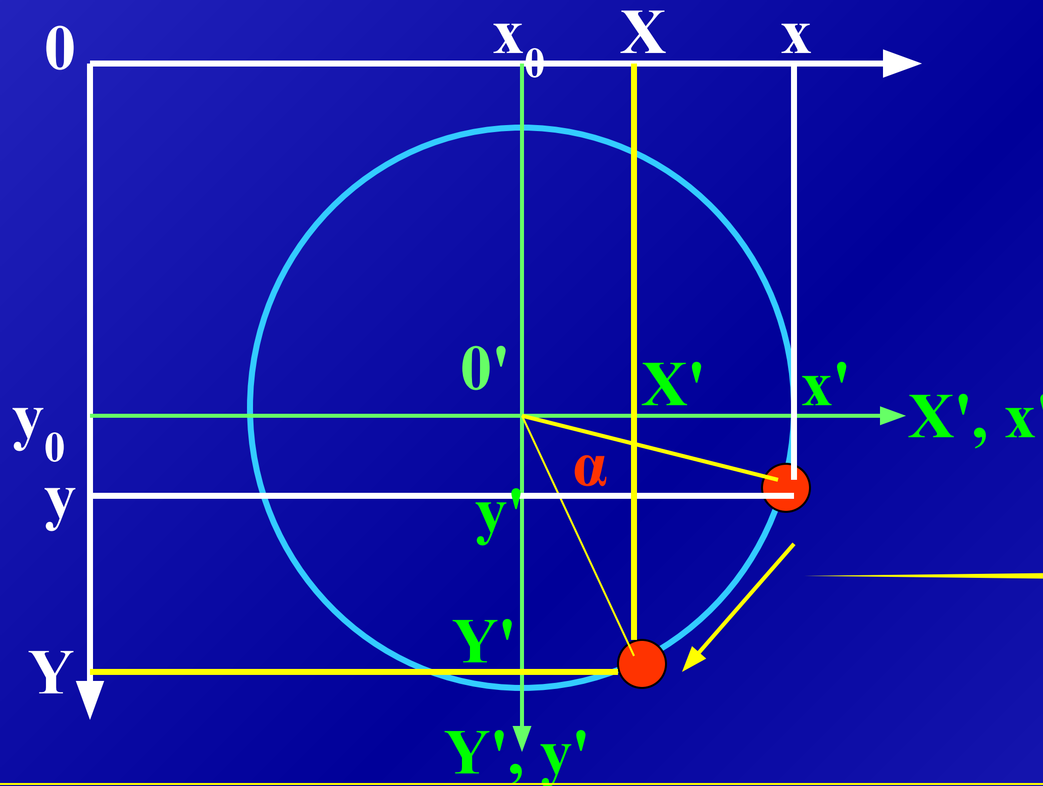
3.3. Поворот вокруг оси Z на угол γ.



$$\begin{cases} X = x\cos\gamma - y\sin\gamma \\ Y = x\sin\gamma + y\cos\gamma \\ Z = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\varsigma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

СВЯЗЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБЪЕКТОВ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ КООРДИНАТ.



Введем новую систему координат (x’,0,y’),центр x_0, y_0):

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

Поворот вокруг центра:

$$\begin{cases} X' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ Y' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

Преобразуем координаты: (X',Y') ----> (X,Y), сдвиг в (0',0'):

$$\begin{cases} X = X' + x_0 \\ Y = Y' + y_0 \end{cases}$$

СВЯЗЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБЪЕКТОВ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ КООРДИНАТ.

Объединив формулы:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} X' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ Y' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \quad \begin{cases} X = X' + x_0 \\ Y = Y' + y_0 \end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases} X = (x-x_0) * \cos\alpha - (y-y_0) * \sin\alpha + x_0 \\ Y = (x-x_0) * \sin\alpha + (y-y_0) * \cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Сдвиг системы координат на } -(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Поворот на угол } \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Сдвиг системы координат на } (x_0, y_0) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\cos\alpha} & \boldsymbol{-\sin\alpha} & \boldsymbol{-x_0 * \cos\alpha + y_0 * \sin\alpha + x_0} \\ \boldsymbol{\sin\alpha} & \boldsymbol{\cos\alpha} & \boldsymbol{-x_0 * \sin\alpha - y_0 * \cos\alpha + y_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$